I. NEODREĐENI INTEGRALI

Uvod s povijesnim osvrtom

Deriviranje, kao postupak, teče uglavnom lako. Uz pomoć nekoliko pravila-formula mogu se derivirati sve elementarne funkcije. Antideriviranje, postupak suprotan deriviranju, je međutim vrlo teško. Samo se jedan "manji" dio elementarnih funkcija može antiderivirati.

Neodređeni integral neke funkcije je skup svih antiderivacija te funkcije. Pojmu neodređenog integrala predhodi pojam integrala. Taj je pojam proizašao iz jedne značajne formule koja povezuje integral i antiderivaciju. Zbog sklada u nazivlju pojmu integrala je pridodan pridjev, određeni.

Definicija neodređenog integrala je znatno jednostavnija od definicije određenog integrala. Zato se u nastavi matematike prvo proučavaju neodređeni, a potom određeni integrali. Jedne i druge zajedno najčešće kratko zovemo integralima.

Spomenuta značajna formula, Leibniz-Newtonova formula, ima velike mogućnosti primjene kada se savlada postupak antideriviranja. Ovdje, u prvoj glavi udžbenika, je predočen taj postupak antideriviranja, uobličen u pojam neodređenog integrala.

Lekcije

1. Antiderivacije

Definicija. Funkcija $F(x)$ je **antiderivacija** ili **prim funkcija** funkcije $f(x)$ na području D, ako za svaki x iz D vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

U primjerima što slijede uglavnom se izostavlja određivanje područja D. Pažnja se usmjerava na traženje same antiderivacije $F(x)$.

Primjer 1. Provjeri je li funkcija $F(x) = 2x^4 + \cos x + 3$ antiderivacija funkcije $f(x) = 8x^3 - \sin x$.

Rješenje. Treba provjeriti je li $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = 8x^3 - \sin x = f(x)$$

Funkcija $F(x)$ jest antiderivacija funkcije $f(x)$.

$\square$

Primjer 2. Provjeri je li funkcija $F(x) = x^2 e^x - 2x$ antiderivacija funkcije

$f(x) = (x^2 + 2x)e^x - 1$.

Rješenje. Provjera je li $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = 2xe^x + x^2 e^x - 2 = (x^2 + 2x)e^x - 2 \neq f(x)$$

Funkcija $F(x)$ nije antiderivacija funkcije $f(x)$.

□

Primjer 3. Pronađi tri antiderivacije funkcije $f(x)=x^2$.

Rješenje.

$$F_1(x)=\frac{1}{3}x^3,\ F_2(x)=\frac{1}{3}x^3+1\ ,\ F_3(x)=\frac{1}{3}x^3-\sqrt{2}$$

□

Primjer 4. Za funkciju $f(x)=1+\cos x$ pronađi dvije antiderivacije $F_1(x)$ i $F_2(x)$ te odredi najšire područje D na kojem vrijedi $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$.

Rješenje. Funkcije

$$F_1(x)=x+\sin x\ ,\ F_2(x)=x+\sin x+\pi$$

su antiderivacije na cijelom realnom području, tj. $D=\mathbb{R}$.

□

Primjer 5. Odredi jednu antiderivaciju $F(x)$ funkcije $f(x)=x-\sqrt{x}$ i najšire područje D na kojem vrijedi $F'(x)=f(x)$.

Rješenje. Funkcija

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

je antiderivacija na skupu nenegativnih realnih brojeva, tj. $D=\left[0,+\infty\right\rangle$.

□

Primjer 6. Odredi antiderivaciju funkcije $f(x)=\frac{5}{x}$ na području $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Rješenje. Funkcija $G(x)=5\ln x$ je antiderivacija na području $D_G=\langle 0,+\infty\rangle$, a funkcija

$$F(x)=5\ln|x|$$

je antiderivacija na području $D=\mathbb{R}\setminus 0=\langle -\infty,0\rangle\cup\langle 0,+\infty\rangle$.

□

Primjeri daju naslutiti da je razlika dviju antiderivacija funkcije $f(x)$ samo broj, tj. konstanta. Pokažimo da je to istina. Neka su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ antiderivacije funkcije $f(x)$, odnosno neka je $F_1'(x)=f(x)$ i $F_2'(x)=f(x)$. Tada slijedi:

$$F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$
$$\left[F_1(x)-F_2(x)\right]'=0$$
$$F_1(x)-F_2(x)=c$$

Prema tome, odredimo li jednu antiderivaciju $F(x)$ funkcije $f(x)$, tada su dodavanjem realnih brojeva antiderivaciji $F(x)$ određene sve ostale antiderivacije funkcije $f(x)$. Skup svih antiderivacija funkcije $f(x)$,

$$\{F(x)+c : c\in\mathbb{R}\},$$

se obično zapisuje kraće bez vitičastih zagrada i s velikim C:

$$F(x)+C.$$

Evo kako to skraćeno zapisivanje svih antidervacija izgleda u jednom primjeru.

Primjer 7. Odredi sve antiderivacije funkcije $f(x) = 2x - 3$.

Rješenje. Jedna antiderivacija je funkcija

$$x^2 - 3x,$$

a sve antiderivacije predočava kratko zapisan skup funkcija

$$x^2 - 3x + C.$$

□

Primjer 8. Pronađi antiderivaciju $F(x)$ funkcije $f(x) = e^x - \sin x$ za koju je $F(0) = 4$.

Rješenje. Sve antiderivacije funkcije $f(x)$ su određene izrazom

$$e^x + \cos x + C .$$

Tražimo onu koja za $x = 0$ iznosi 4:

$$e^0 + \cos 0 + C = 4$$
$$C = 2$$
$$F(x) = e^x + \cos x + 2$$

□

Primjer 9. Pronađi onu antiderivaciju $F(x)$ funkcije $f(x) = \frac{2x}{x^2 + e^2}$ koja zadovoljava uvjet $F(e) = 2$.

Rješenje. Sve antiderivacije funkcije $f(x)$ su predočene izrazom

$$\ln\left(x^2 + e^2\right) + C .$$

Mi tražimo onu koja za $x = e$ iznosi 2:

$$\ln\left(e^2 + e^2\right) + C = 2$$
$$C = 2 - \ln 2e^2 = 2 - \left(\ln 2 + 2\right) = -\ln 2$$
$$F\left(x\right) = \ln\left(x^2 + e^2\right) - \ln 2 = \ln\frac{x^2 + e^2}{2}$$

□

Napomena. Na žalost, antiderivacije mnogih funkcija ne mogu se izraziti pomoću elementarnih funkcija. Tako npr. nisu elementarne antiderivacije funkcija

$$f\left(x\right) = \sin\left(x^2\right) \ , \ f\left(x\right) = \frac{\cos x}{x} \ , f\left(x\right) = \frac{e^x}{x} \ , \ \dots \ .$$

Iako je antideriviranje znatno teži postupak od deriviranja, tri osnovna pravila su ista. Ta smo pravila već koristili u primjerima. Ako je $F\left(x\right)$ antiderivacija od $f\left(x\right)$ i ako je $G\left(x\right)$ antiderivacija od $g\left(x\right)$, onda je:

(1) $F\left(x\right) + G\left(x\right)$ antiderivacija od $f\left(x\right) + g\left(x\right)$

(2) $F\left(x\right) - G\left(x\right)$ antiderivacija od $f\left(x\right) - g\left(x\right)$

(3) $cF\left(x\right)$ antiderivacija od $cf\left(x\right)$

Završimo lekciju važnom činjenicom koja ističe da neprekinuta funkcija ima antiderivaciju.

Teorem o antiderivaciji. Ako je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i ako je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekinuta funkcija, onda postoji derivabilna funkcija $F\left(x\right)$ za koju vrijedi

$$F'\left(x\right) = f\left(x\right) \text{ za svaki } x \in I.$$

Isti teorem vrijedi i za neprekinutu funkciju $f : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$ zato što se ona može proširiti do neprekinute funkcije $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ gdje je I neki otvoreni interval koji sadrži $\left[a, b\right]$.

2. Neodređeni integral

2.1. Definicija neodređenog integrala

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f(x)$ na nekom području je skup svih njenih antiderivacija na tom području, a bilježi se oznakom

$$\int f(x)\,dx \ .$$

Ova neobična oznaka potječe od oznake za određeni integral i jedne jako važne formule koja povezuje određeni integral s antiderivacijom. U toj oznaki funkciju $f(x)$ nazivamo **podintegralnom funkcijom** ili **integrandom**. Umjesto podpunog naziva neodređeni integral služimo se i skraćenim nazivom integral. Ako se područje neodređenog integrala ne ističe posebno, podrazumijeva se ono najšire.

Primjer 10. Pronađi neodređeni integral funkcije $f(x)=x^2$.

Rješenje. Treba pronaći jednu antiderivaciju $F(x)$ i njoj dodati konstante C:

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3 \quad , \quad \int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

□

Primjer 11. Odredi $\int \sqrt{x}dx$ i njegovo najšire područje.

Rješenje. Za neodređeni integral

$$\int \sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$

najšire je područje $D=\left[0,+\infty\right\rangle$, tj. skup nenegativnih realnih brojeva. □

2.2. Računska pravila neodređenog integrala

Računska svojstva neodređenog integrala proizlaze iz računskih svojstava antiderivacije. Predpostavimo da postoje $\int f(x)dx$ i $\int g(x)dx$. Tada vrijede pravila:

(1) $$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x) + \int g(x)dx$$

(2) $$\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x) - \int g(x)dx$$

(3) $$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Primjer 12. Pomoću računskih pravila odredi:

(1) $\int (x+1)dx$ (2) $\int (\cos x - \sin x)dx$ (3) $\int 7e^x dx$

Rješenje.

(1) $\int (x+1)dx = \int xdx + \int 1dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1 + x + C_2 = \frac{1}{2}x^2 + x + C \quad , C = C_1 + C_2$

(2) $\int (\cos x - \sin x)dx = \int \cos xdx - \int \sin xdx = \sin x + C_1 - (-\cos x + C_2) =$

$= \sin x + \cos x + C \quad , C = C_1 - C_2$

(3) $\int 7e^x dx = 7\int e^x dx = 7(e^x + C_1) = 7e^x + C \quad , C = 7C_1$

□

Primjer 13. Odredi $\int \left(x - 3\sqrt{x}\right)^2 dx$.

Rješenje.

$$\int \left(x-3\sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 6x\sqrt{x} + 9x\right)dx = \int x^2 dx - 6\int x^{\frac{3}{2}}dx + 9\int xdx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 6\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2}x^2 + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{12}{5}\sqrt{x^5} + \frac{9}{2}x^2 + C$$

□

2.3. Tablica osnovnih integrala

Za što lakše i brže integriranje potrebna je neka tablica osnovnih integrala. Takva tablica obično nastaje iz dijela tablice osnovnih derivacija uz još nekoliko pridodanih formula. Valjanost tabličnih integrala se može provjeriti deriviranjem: derivacija izraza na desnoj strani treba biti jednaka podintegralnom izrazu na lijevoj strani.

Primjer 14. Deriviranjem provjeri valjanost formule

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad , \quad a \neq 0.$$

Rješenje. Izraz $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ ćemo derivirati kao umnožak konstante $\frac{1}{a}$ i složene funkcije $\arctan\frac{x}{a}$:

$$\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

□

Primjer 15. Provjeri valjanost formule

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \quad , \quad a \neq 0.$$

Rješenje. Prvo ponovimo da se derivacija funkcije $f(x)=|x|$ za $x \neq 0$ može zapisati kao $f'(x)=\frac{|x|}{x}$. Primijetimo da je za $a \neq 0$ izraz $x+\sqrt{x^2+a} \neq 0$ za svaki x za koji je $x^2+a \geq 0$. Slijedi deriviranje desne strane kao višestruko složene funkcije:

Tablica osnovnih integrala	
01	$\int 0dx = 0 + C$
02	$\int 1dx = x + C$
03	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \; a \neq -1$
04	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + C$
05	$\int e^x dx = e^x + C$
06	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \; a > 0 \; , \; a \neq 1$
07	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
08	$\int \cos x dx = \sin x + C$
09	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
10	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
11	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad , \; a \neq 0$
12	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C \quad , \; a \neq 0$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a} \right\rvert + C \quad , \; a \neq 0$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad , \; a \neq 0$
15	$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a} \right\rvert \right) + C \; , \; a \neq 0$
16	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C \quad , \; a \neq 0$

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\right)'=\frac{1}{\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}\cdot\frac{\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

□

Primjer 16. Služeći se tablicom odredi:

$$(1)\ \int\sqrt[4]{x^3}\,dx \qquad (2)\ \int\frac{1}{\sqrt{x^5}}\,dx \qquad (3)\ \int\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{10}{3}}}\,dx$$

Rješenje.

$$(1)\ \int\sqrt[4]{x^3}\,dx=\int x^{\frac{3}{4}}dx=\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+C=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C=\frac{4}{7\sqrt[7]{x^4}}+C$$

$$(2)\ \int\frac{1}{\sqrt{x^5}}\,dx=\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1}+C=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{3\sqrt{x^3}}+C$$

$$(3)\ \int\frac{x^2\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{10}{3}}}\,dx=\int x^{2+\frac{1}{3}-\frac{10}{3}}dx=\int x^{-1}dx=\ln|x|+C$$

□

Primjer 17. Uz pomoć tablice izračunaj:

$$(1)\ \int 2^x\,dx \qquad (2)\ \int(2+e)^x\,dx \qquad (3)\ \int 2^{3x}\,dx$$

Rješenje.

$$(1)\ \int 2^x\,dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C \qquad (2)\ \int(2+e)^x\,dx=\frac{(2+e)^x}{\ln(2+e)}+C$$

$$(3)\quad \int 2^{3x}\,dx = \int 8^{x}\,dx = \frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + C$$

□

Primjer 18. Prilagodbom integranda tablici, odredi:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+5}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}}\,dx$

Rješenje.

$$(1)\quad \int \frac{1}{x^2+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

$$(2)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+(-5)}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C$$

□

2.4. Integriranje pomoću tablice i osnovnih pravila

Primjer 19. Prilagodbom integranda tablici, pomoću izlučivanja, izračunaj:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3}}\,dx$

Rješenje.

$$(1)\quad \int \frac{1}{1-4x^2}\,dx = \int \frac{1}{-4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right| + C$$

$$(2)\quad \int \frac{1}{\sqrt{2x^2-3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\left(x^2-\frac{3}{2}\right)}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-\frac{3}{2}}}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{2}}\right| + K = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2-3}\right| + C$$

$$\left(C = K - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\sqrt{2}\right)$$

□

Primjer 20. Rastavljanjem integranda na zbroj ili razliku, primjenom osnovnih pravila i upotrebom tabličnih integrala, izračunaj:

(1) $\int (2x-3)^2\,dx$ (2) $\int (x-1)^3\,dx$

(3) $\int \frac{x-6}{2x}dx$ (4) $\int \frac{(3x+1)(x^2-4)}{x}dx$

Rješenje.

$$(1)\quad \int (2x-3)^2\,dx = \int (4x^2-12x+9)\,dx = 4\int x^2dx - 12\int xdx + 9\int dx =$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + C$$

$$(2)\quad \int (x-1)^3\,dx = \int (x^3-3x^2+3x-1)\,dx = \int x^3dx - 3\int x^2dx + 3\int xdx - \int dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$$

$$(3)\quad \int \frac{x-6}{2x}dx = \int \left(\frac{x}{2x}-\frac{6}{2x}\right)dx = \int \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - 3\int \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - 3\ln|x| + C$$

$$(4)\quad \int \frac{(3x+1)(x^2+4)}{x}dx = \int \frac{3x^3+x^2-12x-4}{x}dx = \int \left(3x^2+x-12-\frac{4}{x}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2dx + \int xdx - 12\int dx - 4\int \frac{1}{x}dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 4\ln|x| + C$$

□

Primjer 21. Služeći se osnovnim pravilima i tablicom, uz predhodno sređivanje integranda, odredi:

(1) $\int \frac{3x^3+3x^2}{x+1}dx$ (2) $\int \frac{x^2-x-6}{x-3}dx$

(3) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx$ (4) $\int \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right)^2 dx$

Rješenje.

(1) $$\int \frac{3x^3+3x^2}{x+1}dx = \int \frac{3x^2\left(x+1\right)}{x+1}dx = 3\int x^2 dx = x^3 + C$$

(2) $$\int \frac{x^2-x-6}{x-3}dx = \int \frac{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}{x-3}dx = \int \left(x+2\right)dx =$$
$$= \int xdx + 2\int dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

(3) $$\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2 dx}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^2}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{1}{2}}}dx =$$
$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{6}}dx + 2\int x^{-\frac{1}{6}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$
$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{12}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} + C$$

(4) $$\int \left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}}\right)^2 dx = \int \left(x^{-\frac{1}{5}} - x^{\frac{3}{10}}\right)^2 dx =$$
$$= \int \left(x^{-\frac{2}{5}} - 2x^{\frac{1}{10}} + x^{\frac{3}{5}}\right)dx = \int x^{-\frac{2}{5}}dx - 2\int x^{\frac{1}{10}}dx + \int x^{\frac{3}{5}}dx =$$
$$= \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - \frac{20}{11}x^{\frac{11}{10}} + \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{24}\left(3x+8\right)\sqrt[5]{x^3} - \frac{20}{11}\sqrt[10]{x^{11}} + C$$

□

Primjer 22. Uz pomoć osnovnih pravila i tablice, odredi:

(1) $\int \frac{\sin^3 x-1}{\sin^2 x}dx$ (2) $\int \tan^2 xdx$

(3) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$ (4) $\int \left(2^x+1\right)^2 dx$

Rješenje.

(1) $$\int \frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}dx = \int \left(\sin x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int \sin xdx - \int \frac{1}{\sin^2 x}dx =$$

$$= -\cos x + \cot x + C$$

(2) $$\int \tan^2 xdx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = \tan x - x + C$$

(3) $$\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx = \int \left(e^x + e^{-x}\right)dx = \int \left[e^x + \left(\frac{1}{e}\right)^x\right]dx = \int e^x dx + \int \left(\frac{1}{e}\right)^x dx =$$

$$= e^x + \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln\frac{1}{e}} + C = e^x - e^{-x} + C$$

(4) $$\int \left(2^x+1\right)^2 dx = \int \left(2^{2x} + 2\cdot 2^x + 1\right)dx = \int \left(4^x + 2\cdot 2^x + 1\right)dx =$$

$$= \int 4^x dx + 2\int 2^x dx + \int dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{2^x}{\ln 2} + x + C = \frac{2^{2x-1}+2^{x+1}}{\ln 2} + x + C$$

□

3. Metode integracije

Koriste se dvije općenite metode integracije: **metoda integracije zamjenom (supstitucijom)** i **metoda djelomične (parcijalne) integracije**. Prva se metoda odprilike odnosi na integraciju složene funkcije, a druga odprilike na integraciju umnožka funkcija. Potrebno je istaknuti da ove metode dovode do rješenja samo u nekim slučajevima, za razliku od formula za derivaciju složene funkcije i derivaciju umnožka funkcija koje su uvijek dovodile do rješenja.

3.1. Metoda integracije zamjenom

Pri određivanju $\int f\left(g\left(x\right)\right)dx$ ponekad pomaže uvođenje nove promjenljive t zamjenom $g\left(x\right)=t$:

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)dx \left[\!\!\left[\begin{array}{c} g\left(x\right)=t \\ x=g^{-1}\left(t\right) \\ dx=\left(g^{-1}\right)'\left(t\right)dt \end{array}\right]\!\!\right] =\int f\left(t\right)\left(g^{-1}\right)'\left(t\right)dt$$

Nastala je **formula za integraciju zamjenom** u kojoj je integrand na lijevoj strani izražen **u složenom obliku**. Predpostavlja se da funkcija g ima derivabilnu inverznu funkciju g^{-1} bar na nekom malom intervalu.

Određivanje integrala $\int f\left(x\right)dx$ u nekim slučajevima omogućava zamjena $x=g\left(t\right)$:

$$\int f\left(x\right)dx \left[\!\!\left[\begin{array}{c} x=g\left(t\right) \\ dx=g'\left(t\right)dt \end{array}\right]\!\!\right] =\int f\left(g\left(t\right)\right)g'\left(t\right)dt$$

Proizašla je **formula za integraciju zamjenom** u kojoj je integrand na lijevoj strani izražen **u jednostavnom obliku**. Za ovaj oblik formule se predpostavlja da je funkcija g derivabilna bar na nekom malom intervalu.

Primjer 23. Pogodnom zamjenom $\int \cos(3x-2)\,dx$ svedi na tablični, a zatim ga riješi.

Rješenje.

$$\int \cos(3x-2)\,dx \left\|\begin{matrix} 3x-2=t \\ x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3} \\ dx=\frac{1}{3}dt \end{matrix}\right\| = \int (\cos t)\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sin(3x-2)+C$$

□

Primjer 24. Pogodnom zamjenom $\int \sqrt[3]{1-2x}dx$ svedi na tablični i riješi ga.

Rješenje.

$$\int \sqrt[3]{1-2x}dx \left\|\begin{matrix} 1-2x=t \\ x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \\ dx=-\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\| = \int \sqrt[3]{t}\left(-\frac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-2x)^4}+C$$

□

Primjer 25. Odredi $\int \frac{1}{x+\frac{1}{3}}dx.$

Rješenje.

$$\int \frac{1}{x+\frac{1}{3}}dx \left[\!\left[\begin{matrix} x+\frac{1}{3}=t \\ dx=dt \end{matrix}\right]\!\right] = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C_1 = \ln\left|x+\frac{1}{3}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{3x+1}{3}\right| + C_1 =$$

$$= \ln|3x+1| - \ln 3 + C_1 = \ln|3x+1| + C \ , \ C = C_1 - \ln 3$$

□

Primjer 26. Odredi $\int x^3\sqrt{x^4-3}dx.$

Rješenje.

$$\int x^3\sqrt{x^4-3}dx = \int \sqrt{x^4-3}x^3dx \left[\!\left[\begin{matrix} x^4-3=t \\ 4x^3dx=dt \\ x^3dx=\frac{1}{4}dt \end{matrix}\right]\!\right] = \int \sqrt{t}\frac{1}{4}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}\sqrt{\left(x^4-3\right)^3} + C$$

□

Primjer 27. Izvedi tabličnu formulu za $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ a \neq 0.$

Rješenje.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \left[\!\left[\begin{matrix} x=at \\ dx=adt \end{matrix}\right]\!\right] = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}adt =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

□

Primjer 28. Odredi $\int \frac{1}{x\ln x}dx.$

Rješenje.

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}dx \left\| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right\| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$$

□

Primjer 29. Odredi $\int \frac{\log^2 x}{x}dx.$

Rješenje.

$$\int \frac{\log^2 x}{x}dx \left\| \begin{array}{c} \log x = t \\ \frac{1}{x\ln 10}dx = dt \\ \frac{1}{x}dx = (\ln 10)dt \end{array} \right\| = (\ln 10)\int t^2 dt = (\ln 10)\frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln 10}{3}\log^3 x + C$$

□

Primjer 30. Riješi $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

Rješenje.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{x^2-1}}dx \left\| \begin{array}{c} x^2-1=t \\ x^2=t+1 \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt + \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}t^{\frac{1}{2}}(t+3) + C = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2-1} + C$$

□

3.2. Metoda djelomične integracije

Pojednostavljivanje i izračunavanje nekih neodređenih integrala omogućava **formula za djelomičnu integraciju**:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Ista se formula može zapisati u kraćem i pamtljivijem obliku uz skraćenice $u = f(x)$ i $v = g(x)$ iz kojih slijedi $du = f'(x)dx$ i $dv = g'(x)dx$, te:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Primjenjuje se upravo ovaj skraćeni oblik formule za djelomičnu integraciju. Upotreba formule (s lijeva u desno) je moguća samo ako možemo odrediti funkciju v, a korisna tek onda kada je integral na desnoj strani jednostavniji od integrala na lijevoj strani. Pri određivanju funkcije

$$v = \int dv$$

nije potrebno dodavati konstantu, dovoljno je istu dodati završnom rješenju.

Formula za djelomičnu integraciju se lako izvodi u tri koraka. Prvo se derivira umnožak $f(x)g(x)$, potom se obje strane integriraju, te se na kraju jedan integral izrazi na lijevoj strani:

$$\begin{gathered}
\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \;\; / \int \ldots dx \\
f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \\
\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx
\end{gathered}$$

Primjer 31. Pogodnim izborom funkcije u i diferencijala dv pronađi neodređeni integral logaritamske funkcije,

$$\int \log_a xdx.$$

Rješenje.

$$\int \log_a x dx \left[\!\left[\begin{array}{cc} u = \log_a x & , \quad dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x \ln a} dx & , \quad v = \int dx = x \end{array}\right]\!\right] = \left(\log_a x\right) x - \int x \frac{1}{x \ln a} dx =$$

$$= x \log_a x - \frac{1}{\ln a} \int dx = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$$

□

Primjer 32. Riješi $\int x \sin x dx$.

Rješenje. Prvi izbor:

$$\int x \sin x dx \left[\!\left[\begin{array}{cc} u = \sin x & , \quad dv = x dx \\ du = \cos x dx & , \quad v = \int x dx = \dfrac{1}{2} x^2 \end{array}\right]\!\right] = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx$$

Izbor ne vodi rješenju jer je $\int x^2 \cos x dx$ teži od polaznog $\int x \sin x dx$. Pokušat ćemo novim izborom.

Drugi izbor:

$$\int \sin x dx \left[\!\left[\begin{array}{cc} u = x & , \quad dv = \sin x dx \\ du = dx & , \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right]\!\right] = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

□

Primjer 33. Dvostrukom primjenom formule za djelomičnu integraciju riješi $\int x^2 e^x dx$.

Rješenje. Početno rješenje:

$$\int x^2 e^x dx \left[\!\left[\begin{array}{cc} u = x^2 & , \quad dv = e^x dx \\ du = 2x dx & , \quad v = e^x \end{array}\right]\!\right] = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

Međurješenje za integral na desnoj strani:

$$\int xe^x dx \left[\!\left[\begin{matrix} u = x & , & dv = e^x dx \\ du = dx & , & v = e^x \end{matrix}\right]\!\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Završno rješenje:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C$$

□

Primjer 34. Nakon dvostruke primjene formule za djelomičnu integraciju na $\int e^x \cos x dx$ pojavljuje se jednadžba iz koje se taj integral može izraziti. Odredi jednadžbu pa iz nje izrazi integral.

Rješenje. Prva primjena formule na zadani integral:

$$\int e^x \cos x dx \left[\!\left[\begin{matrix} u = e^x & , & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx & , & v = \sin x \end{matrix}\right]\!\right] = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Druga primjena formule na integral na desnoj strani:

$$\int e^x \sin x dx \left[\!\left[\begin{matrix} u = e^x & , & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & , & v = -\cos x \end{matrix}\right]\!\right] = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

Integralna jednadžba i završno rješenje:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x + \cos x\right) + C$$

□

Primjedba. Predhodni primjer se može riješiti na isti način i uz obrnuti odabir

$u = \cos x$ i $dv = e^x dx$.

3.3. Integriranje pomoću obje metode

Ispreplitanje obiju metoda integracije povećava uspješnost u pronalaženju neodređenih integrala.

Primjer 35. Primjenom obiju metoda odredi $\int \ln \frac{x-1}{x+1} dx$.

Rješenje. Djelomična integracija:

$$\int \ln \frac{x-1}{x+1} dx \left[\!\left[\begin{array}{ll} u = \ln \frac{x-1}{x+1} & , \; dv = dx \\ du = \frac{2}{x^2-1} dx & , \; v = x \end{array} \right]\!\right] = x \ln \frac{x-1}{x+1} - \int \frac{2x}{x^2-1} dx$$

Zamjena:

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \left[\!\left[\begin{array}{l} x^2-1 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right]\!\right] = \int \frac{1}{t} dt = \ln t = \ln\left(x^2-1\right)$$

Završno rješenje:

$$\int \ln \frac{x-1}{x+1} dx = x \ln \frac{x-1}{x+1} - \ln\left(x^2-1\right) + C$$

□

Primjer 36. Pomoću obje metode odredi $\int \arcsin\left(x-1\right) dx$.

Rješenje. Zamjena:

$$\int \arcsin\left(x-1\right) dx \left[\!\left[\begin{array}{l} x-1 = t \\ dx = dt \end{array} \right]\!\right] = \int \arcsin t dt$$

Djelomična integracija:

$$\int \arcsin t dt \left\| \begin{matrix} u = \arcsin t & , & dv = dt \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt & , & v = t \end{matrix} \right\| = t \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Zamjena:

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \left\| \begin{matrix} 1-t^2 = s \\ tdt = -\dfrac{1}{2} ds \end{matrix} \right\| = -\sqrt{s} = -\sqrt{1-t^2}$$

Završno rješenje:

$$\int \arcsin(x-1) dx = t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C =$$
$$= (x-1)\arcsin(x-1) + \sqrt{2x-x^2} + C$$

□

4. Integriranje racionalnih funkcija

4.1. Rastav racionalne funkcije

Ponovimo kratko nazive koji su vezani uz racionalnu funkciju. Cijela racionalna funkcija je polinom. Prava racionalna funkcija ima stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku. Djelomični ili parcijalni razlomci su najjednostavnije prave racionalne funkcije.

Ponovimo još pravila koja govore o rastavu racionalne funkcije. Racionalna funkcija, koja nije ni cijela ni prava, se može dijeljenjem brojnika nazivnikom rastaviti na zbroj polinoma i prave racionalne funkcije. Prava racionalna funkcija, koja nije djelomični razlomak, se može metodom neodređenih koeficijenata rastaviti na zbroj djelomičnih razlomaka.

Želimo li integrirati racionalnu funkciju, prvo ju moramo maksimalno rastaviti na pribrojnike, a zatim integrirati svaki pribrojnik. Evo kako to izgleda u jednom primjeru.

Primjer 37. Odredi $\int \frac{3x^4 - 4x^3 - 5}{x^3 + x}\,dx$.

Rješenje. Rastav integranda na zbroj polinoma i prave racionalne funkcije pomoću dijeljenja brojnika nazivnikom:

<table>
<tr><td>x^4</td><td>x^3</td><td>x^2</td><td>x</td><td>1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="5">djeljenik</td><td colspan="3">djelitelj</td><td>količnik</td></tr>
<tr><td>$3x^4$
$\pm 3x^4$</td><td>$-4x^3$</td><td>$\pm 3x^2$</td><td></td><td>-5</td><td>$:$</td><td>$x^3 + x$</td><td>$=$</td><td>$3x - 4$</td></tr>
<tr><td colspan="5">djeljenik</td><td colspan="4" rowspan="4">rastav
$\frac{3x^4 - 4x^3 - 5}{x^3 + x} = 3x - 4 + \frac{-3x^2 + 4x - 5}{x^3 + x}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$-4x^3$
$\mp 4x^3$</td><td>$-3x^2$</td><td>$\mp 4x$</td><td>-5</td></tr>
<tr><td colspan="5">ostatak</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$-3x^2$</td><td>$+4x$</td><td>-5</td></tr>
</table>

Nakon faktorizacije nazivnika, $x^3 + x = x\left(x^2 + 1\right)$, pravu racionalnu funkciju $\frac{-3x^2 + 4x - 5}{x^3 + x}$ rastavljamo na zbroj djelomičnih razlomaka pomoću metode neodređenih koeficijenata:

$$\frac{-3x^2 + 4x - 5}{x\left(x^2 + 1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \quad / \; x\left(x^2 + 1\right)$$

$$-3x^2+4x-5=A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x$$
$$-3x^2+4x-5=\left(A+B\right)x^2+Cx+A$$

$$\begin{array}{l} A \;+\; B \qquad = -3 \\ \qquad\qquad \mathrm{C} = 4 \\ A \qquad\qquad = -5 \\ \hline A=-5, B=2, \mathrm{C}=4 \end{array}$$

$$\frac{-3x^2+4x-5}{x\left(x^2+1\right)}=-\frac{5}{x}+\frac{2x+4}{x^2+1}=-\frac{5}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}$$

Integriranje svih pribrojnika u rastavu:

$$\frac{3x^4-4x^3-5}{x^3+x}=3x-4-\frac{5}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}$$

$$\int xdx=\frac{1}{2}x^2 \;,\; \int dx=x \;,\; \int\frac{1}{x}dx=\ln|x| \;,\; \int\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan x$$

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx \left[\!\left[\begin{array}{c} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \end{array}\right]\!\right] =\int\frac{1}{t}dt=\ln t=\ln\left(x^2+1\right)$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int\frac{3x^4-4x^3-5}{x^3+x}dx=3\int xdx-4\int dx-5\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx+4\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{3}{2}x^2-4x-5\ln|x|+\ln\left(x^2+1\right)+4\arctan x+C$$

□

Zbog važnosti integrala racionalne funkcije u sljedeće tri podlekcije ćemo postupno integrirati djelomične razlomke, prave racionalne funkcije, i na kraju, bilo koje racionalne funkcije.

4.2. Integriranje djelomičnih razlomaka

Dvije su vrste djelomičnih razlomaka. **Prva** se **vrsta** obično izražava oblikom

$$\frac{A}{(ax+b)^n}$$

u kojem su koeficijenti a, b i A realni brojevi uz uvjet $a \neq 0$, a eksponent n prirodan broj. **Druga** se **vrsta** izražava oblikom

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

u kojem su koeficijenti a, b, c, A i B realni brojevi uz uvjet $b^2-4ac<0$, a eksponent n prirodan broj.

Integriranje djelomičnih razlomaka prve vrste je lagano: ako je potrebno,uvede se zamjena $ax+b=t$. Evo dva primjera.

Primjer 38. Odredi $\int \frac{2}{3x^6}dx$.

Rješenje. $$\int \frac{2}{3x^6}dx = \frac{2}{3}\int x^{-6}dx = \frac{2}{3}\frac{x^{-5}}{-5}+C = -\frac{2}{15x^5}+C$$ □

Primjer 39. Odredi $\int \frac{-5}{(2x-1)^3}dx$.

Rješenje.

$$\int \frac{-5}{(2x-1)^3}dx \left[\!\left[\begin{matrix} 2x-1=t \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix} \right]\!\right] = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{t^3}dt = \frac{5}{4t^2}+C = \frac{5}{4(2x-1)^2}+C$$

□

Integriranje djelomičnih razlomaka druge vrste ovisi o eksponentu n: za $n>1$ treba koristiti rekurzivnu formulu i što je n veći integriranje traje dulje. Prvo dva primjera u kojima je $n=1$.

Primjer 40. Odredi $\int \frac{7x-4}{x^2+9}dx$.

Rješenje. Rastav na dva integrala:

$$\int \frac{7x-4}{x^2+9}dx = \int\left(\frac{7x}{x^2+9}-\frac{4}{x^2+9}\right)dx = 7\int \frac{x}{x^2+9}dx - 4\int \frac{1}{x^2+9}dx$$

Integriranje pribrojnika:

$$\int \frac{x}{x^2+9}dx \left[\!\left[\begin{array}{l} x^2+9=t \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right]\!\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2+9}dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}$$

Završno rješenje:

$$\int \frac{7x-4}{x^2+9}dx = \frac{7}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3}+C$$

□

Primjer 41. Riješi $\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx$.

Rješenje. Upodpunjavanje nazivnika podintegralne funkcije do zbroja kvadrata:

$$x^2+2x+5=(x+1)^2-1+5=(x+1)^2+4$$

Zamjena i rastav na dva integrala:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2+4}dx \left[\!\left[\begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right]\!\right] = \int \frac{t-1}{t^2+4}dt = \int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{1}{t^2+4}dt$$

Integriranje pribrojnika:

$$\int \frac{t}{t^2+4}\,dt \quad \left[\!\left[\begin{aligned} t^2+4&=s \\ tdt&=\frac{1}{2}ds \end{aligned} \right]\!\right] \quad =\frac{1}{2}\int \frac{1}{s}\,ds=\frac{1}{2}\ln s=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+4\right)$$

$$\int \frac{1}{t^2+4}\,dt=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}$$

Završno rješenje:

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$$

□

Poopćenje integrala $I_1=\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ je integral

$$I_n=\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx \quad \text{za} \quad n\geq 1.$$

Za taj integral vrijedi rekurzivna formula

$$I_n=\frac{1}{2a^2\left(n-1\right)}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\left(2n-3\right)I_{n-1}\right] \quad \text{za} \quad n\geq 2$$

koja se može izvesti na ovaj način:

$$I_{n-1}=\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\,dx \quad \left[\!\left[\begin{aligned} u&=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} \quad , \quad dv=dx \\ du&=-\frac{2\left(n-1\right)x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx \quad , \quad v=x \end{aligned} \right]\!\right] =$$

$$=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+2\left(n-1\right)\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx = \int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx - a^2\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}dx - a^2\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx = I_{n-1} - a^2 I_n$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + 2(n-1)\left(I_{n-1} - a^2 I_n\right)$$

$$2a^2(n-1)I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$$

U sljedećem primjeru ćemo pokazati kako se koristi rekurzivna formula (lat. rekurzia = hrv. vraćanje unatrag). U određivanju integrala I_n sudjeluju svi predhodnici: $I_{n-1}, I_{n-2}, ..., I_2, I_1$.

Primjer 42. Pomoću rekurzivne formule odredi $I_3 = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^3}dx$.

Rješenje. U rekurzivnu formulu uvrstimo $n = 3$:

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} + I_2\right]$$

U rekurzivnu formulu uvrstimo $n = 2$:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + I_1\right) = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)$$

U izraz za I_3 uvrstimo izračunati I_2:

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)\right]$$

□

Primjer 43. Odredi $\int \frac{x+4}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Rješenje. Rastav na dva integrala:

$$\int \frac{x+4}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx + 4\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

Primjena metode zamjene na prvi integral:

$$\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx \quad \left\|\begin{array}{c} x^2+1=t \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right\| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$$

Primjena formule za I_2 iz predhodnog primjera na drugi integral:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx = I_2\bigg|_{a=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right)$$

Završno rješenje:

$$\int \frac{x-4}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)} + 2\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C =$$

$$= \frac{4x-1}{2\left(x^2+1\right)} + 2\arctan x + C$$

□

4.3. Integriranje pravih racionalnih funkcija

Integriranje prave racionalne funkcije koja nije djelomični razlomak se odvija u četiri koraka:

* rastav nazivnika funkcije na umnožak polinoma prvog stupnja i nerastavljivih polinoma drugog stupnja

* rastav funkcije na zbroj djelomičnih razlomaka pomoću metode neodređenih koeficijenata

* integriranje djelomičnih razlomaka

* zbrajanje izračunatih integrala djelomičnih razlomaka

Primjer 44. Odredi $\int \frac{2x-9}{x^2+2x-15}dx$.

Rješenje. Rastav nazivnika integranda:

$$x^2+2x-15=(x-x_1)(x-x_2)=(x-3)(x+5)$$

Rastav integranda na djelomične razlomke:

$$\frac{2x-9}{(x-3)(x+5)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+5} \quad / \ (x-3)(x+5)$$

$$2x-9=A(x+5)+B(x-3)$$

$$2x-9=A(x+5)+B(x-3)$$

$$\begin{array}{l} A \quad + \quad B=2 \\ \underline{5A \quad - \quad 3B=-9} \\ A=-\frac{3}{8}, B=\frac{19}{8} \end{array}$$

$$\frac{2x-9}{(x-3)(x+5)}=\frac{-\frac{3}{8}}{x-3}+\frac{\frac{19}{8}}{x+5}$$

Integriranje djelomičnih razlomaka:

$$\int\frac{1}{x-3}dx\ \left[\!\left[\begin{array}{l}x-3=t\\dx=dt\end{array}\right]\!\right]=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|=\ln|x-3|$$

$$\int\frac{1}{x+5}dx\ \left[\!\left[\begin{array}{l}x+5=t\\dx=dt\end{array}\right]\!\right]=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|=\ln|x+5|$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int\frac{2x-9}{x^2+2x-15}dx=-\frac{3}{8}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{19}{8}\int\frac{1}{x+5}dx=-\frac{3}{8}\ln|x-3|+\frac{19}{8}\ln|x+5|+C$$

□

Primjer 45. Izvedi formulu za $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx$, $a\neq 0$ (tablični integral).

Rješenje. Rastav nazivnika integranda:

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

Rastav integranda na djelomične razlomke:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}\quad /\ (x-a)(x+a)$$

$$1=A(x+a)+B(x-a)$$

$$0x+1=(A+B)x+(aA-aB)$$

$$\begin{array}{rcl}A+B&=&0\\ aA-aB&=&1\\ \hline \end{array}$$

$$A=\frac{1}{2a},B=-\frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

Integriranje djelomičnih razlomaka:

$$\int\frac{1}{x-a}dx\ \left[\!\!\left[\begin{matrix}x-a=t\\ dx=dt\end{matrix}\right]\!\!\right]\ =\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|=\ln|x-a|$$

$$\int\frac{1}{x+a}dx\ \left[\!\!\left[\begin{matrix}x+a=t\\ dx=dt\end{matrix}\right]\!\!\right]\ =\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|=\ln|x+a|$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

□

Primjer 46. Odredi $\int\frac{-9x^2+6x}{(x-1)^2(3-4x)}dx$.

Rješenje. Nazivnik je već rastavljen. Zato slijedi rastav integranda na djelomične razlomke:

$$\frac{-9x^2+6x}{(x-1)^2(3-4x)}dx=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{3-4x}\quad /\ (x-1)^2(3-4x)$$

$$-9x^2+6x=A(3-4x)+B(x-1)(3-4x)+C(x-1)^2$$

$$-9x^2+6x+0=(-4B+C)x^2+(-4A+7B-2C)x+(3A-3B+C)$$

$$\begin{array}{rcl}-4B+C&=&-9\\ -4A+7B-2C&=&6\\ 3A-3B+C&=&0\\ \hline A=3,B=0,C=-9&&\end{array}$$

$$\frac{-9x^2+6x}{(x-1)^2(3-4x)}=\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{9}{3-4x}$$

Integriranje djelomičnih razlomaka:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx \left[\!\left[\begin{array}{c} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right]\!\right] = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{3-4x}dx \left[\!\left[\begin{array}{c} 3-4x=t \\ dx=-\frac{1}{4}dt \end{array} \right]\!\right] = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{4}\ln|t| = -\frac{1}{4}\ln|3-4x|$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{-9x^2+6x}{(x-1)^2(3-4x)}dx = -\frac{3}{x-1} + \frac{9}{4}\ln|3-4x| + C$$

□

Primjer 47. Odredi $\int \frac{2x^2+3x+3}{x^4+x^3}dx$.

Rješenje. Rastav nazivnika integranda:

$$x^4+x^3 = x^3(x+1)$$

Rastav integranda na djelomične razlomke:

$$\frac{2x^2+3x+3}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x+1} \quad / \; x^3(x+1)$$

$$2x^2+3x+3 = A(x+1) + Bx(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^3$$
$$2x^2+3x+3 = (C+D)x^3 + (B+C)x^2 + (A+B)x + A$$

$$\begin{array}{rcl} C + D &=& 0 \\ B + C &=& 2 \\ A + B &=& 3 \\ A &=& 3 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{A=3, B=0, C=2, D=-2} \end{array}$$

$$\frac{2x^2+3x+3}{x^3(x+1)} = \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$$

Integriranje djelomičnih razlomaka:

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\ ,\ \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\ ,\ \int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1|$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{2x^2+3x+3}{x^4+x^3}\,dx = -\frac{3}{2x^2} + 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + C = -\frac{3}{2x^2} + 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

□

Primjer 48. Odredi $\int \frac{7x^2-4x+5}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$.

Rješenje. Rastav nazivnika integranda:

$$x^3-2x^2+x-2 = x^2(x-2)+(x-2) = (x-2)(x^2+1)$$

Rastav integranda na djelomične razlomke:

$$\frac{7x^2-4x+5}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad / \ (x-2)(x^2+1)$$

$$7x^2-4x+5 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$$

$$7x^2-4x+5 = (A+B)x^2+(-2B+C)x+(A-2C)$$

$$\begin{array}{rcl} A + B & & = 7 \\ -2B + C & & = -4 \\ A \quad -2C & & = 5 \\ \hline A=5, B=2, C=0 & & \end{array}$$

$$\frac{7x^2-4x+5}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{5}{x-2} + \frac{2x}{x^2+1}$$

Integriranje djelomičnih razlomaka:

$$\int \frac{5}{x-2}dx \ \left[\!\left[\begin{array}{c} x-2=t \\ dx=dt \end{array} \right]\!\right] = 5\int \frac{1}{t}\,dt = 5\ln|t| = 5\ln|x-2|$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx \ \left[\!\left[\begin{matrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \end{matrix} \right]\!\right] = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| = \ln\left(x^2+1\right)$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{7x^2-4x+5}{x^3-2x^2+x-2}dx = 5\ln|x-2| + \ln\left(x^2+1\right) + C$$

□

Primjer 49. Odredi $\int \frac{x^2+13}{x^3-6x^2+13x}dx$.

Rješenje. Rastav nazivnika integranda:

$$x^3-6x^2+13x = x\left(x^2-6x+13\right)$$

Rastav integranda na djelomične razlomke:

$$\frac{x^3+13}{x\left(x^2-6x+13\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+13} \quad / \ x\left(x^2-6x+13\right)$$

$$x^2+13 = A\left(x^2-6x+13\right) + \left(Bx+C\right)x$$

$$1x^2+0x+13 = \left(A+B\right)x^2 + \left(-6A+C\right)x + 13A$$

$$\begin{array}{l} A + B = 1 \\ -6A + C = 0 \\ \underline{13A = 13} \\ A=1, B=0, C=6 \end{array}$$

$$\frac{x^2+13}{x\left(x^2-6x+13\right)} = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2-6x+13}$$

Integriranje djelomičnih razlomaka:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{6}{x^2-6x+13}dx = 6\int \frac{1}{(x-3)^2+4}dx \quad \left[\!\left[\begin{array}{c} x-3=t \\ dx=dt \end{array} \right]\!\right] =$$

$$= 6\int \frac{1}{t^2+4}dt = \frac{6}{2}\arctan\frac{t}{2} = 3\arctan\frac{x-3}{2}$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{x^2+13}{x^3-6x^2+13x}dx = \ln|x| + 3\arctan\frac{x-3}{2} + C$$

□

Primjer 50. Odredi $\int \frac{4x}{x^4+4}dx$.

Rješenje. Rastav nazivnika integranda:

$$x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$$

Rastav integranda na djelomične razlomke:

$$\frac{4x}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} \quad / \ (x^4+4)$$

$$4x = (Ax+B)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x^2-2x+2)$$

$$4x = (A+C)x^3 + (2A+B-2C+D)x^2 + (2A+2B+2C-2D)x + (2B+2D)$$

$$\begin{array}{l} A + C = 0 \\ 2A + B - 2C + D = 0 \\ 2A+2B + 2C - 2D = 4 \\ 2B + 2D = 0 \\ \hline A=0, B=1, C=0, D=-1 \end{array}$$

Integriranje djelomičnih razlomaka:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx = \arctan(x-1)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \arctan(x+1)$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{4x}{x^4+4}\,dx = \arctan(x-1) - \arctan(x+1) + C$$

□

4.4. Integriranje racionalnih funkcija

Integriranje racionalne funkcije koja nije ni cijela ni prava se odvija u četiri koraka (drugi korak obuhvaća prva dva koraka iz predhodne podlekcije):

* rastav funkcije na zbroj polinoma i prave racionalne funkcije dijeljenjem brojnika nazivnikom

* rastav prave racionalne funkcije, ukoliko ona već nije djelomični razlomak, na zbroj djelomičnih razlomaka

* integriranje polinoma i djelomičnih razlomaka

* zbrajanje izračunatih integrala

Primjer 51. Odredi $\int \frac{5x^4-10x^3+4x^2-2}{x^2-2x}\,dx$.

Rješenje. Rastav integranda na polinom i pravu racionalnu funkciju:

<table>
<tr><th>x^4</th><th>x^3</th><th>x^2</th><th>x</th><th>1</th><th colspan="2">djelitelj</th><th colspan="2">količnik</th></tr>
<tr><td>$5x^4$</td><td>$-10x^3$</td><td>$+4x^2$</td><td></td><td>-2</td><td>:</td><td>x^2-2x</td><td>=</td><td>$5x^2+4$</td></tr>
<tr><td>$\pm 5x^4$</td><td>$\mp 10x^3$</td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4" rowspan="4">r a s t a v
$\frac{5x^4-10x^3+4x^2-2}{x^2-2x} = 5x^2+4+\frac{8x-2}{x^2-2x}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$4x^2$</td><td></td><td>-2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\pm 4x^2$</td><td>$\mp 8x$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$8x$</td><td>-2</td></tr>
</table>

Rastav prave racionalne funkcije:

$$x^2-2x=x(x-2)$$

$$\frac{8x-2}{x(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2} \quad / \; x(x-2)$$

$$8x-2=(A+B)x-2A$$

$$\begin{array}{l} A+B=8 \\ \underline{-2A \qquad =-2} \\ A=1, B=7 \end{array}$$

$$\frac{8x-2}{x(x-2)}=\frac{1}{x}+\frac{7}{x-2}$$

Integriranje svih članova rastava:

$$\frac{5x^4-10x^3+4x^2-2}{x^2-2x}=5x^2+4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x-2}$$

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3,\ \int dx=x,\ \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|,\ \int\frac{1}{x-2}dx=\ln|x-2|$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int\frac{5x^4-10x^3+4x^2-2}{x^2-2x}=5\int x^2dx+4\int dx+\int\frac{1}{x}dx+7\int\frac{1}{x-2}dx=$$

$$\frac{5}{3}x^3+4x+\ln|x|+7\ln|x-2|+C$$

□

Primjer 52. Odredi $\int \frac{3x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + x} dx$.

Rješenje. Rastav integranda na polinom i pravu racionalnu funkciju:

x^4	x^3	x	x	1	djelitelj			količnik
$3x^4$		$-3x^2$		$+5$	:	$x^2 + x$	=	$3x^2 - 3x$
$\pm 3x^4$	$\pm 3x^3$				rastav			
	$-3x^3$	$-3x^2$		$+5$	$\frac{3x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + x} = 3x^2 - 3x + \frac{5}{x^2 + x}$			
	$\mp 3x^3$	$\mp 3x^2$						
				5				

Rastav prave racionalne funkcije:

$$x^2 + x = x(x+1)$$

$$\frac{5}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{5}{x} - \frac{5}{x+1}$$

Integriranje svih članova rastava:

$$\frac{3x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + x} = 3x^2 + 3x + \frac{5}{x} - \frac{5}{x+1}$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3, \ \int x dx = \frac{1}{2}x^2, \ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|, \ \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1|$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{3x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + x} dx = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5\ln|x| - 5\ln|x+1| + C =$$

$$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

□

Primjer 53. Odredi $\int \frac{-3x^4+x^2+1}{4x^3-x}dx$.

Rješenje. Rastav integranda na polinom i pravu racionalnu funkciju:

x^4	x^3	x^2	x	1		djelitelj		količnik
$-3x^4$		$+x^2$		$+1$	:	$4x^3-x$	$=$	$-\frac{3}{4}x$
$\mp 3x^4$		$\pm\frac{3}{4}x^2$			rastav			
		$\frac{1}{4}x^2$		$+1$	$\frac{-3x^4+x^2+1}{4x^3-x}=-\frac{3}{4}x+\frac{\frac{1}{4}x^2+1}{4x^3-x}$			

Rastav prave racionalne funkcije:

$$4x^3-x=x\left(4x^2-1\right)=x(2x-1)(2x+1)$$

$$\frac{\frac{1}{4}x^2+1}{x(2x-1)(2x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{2x+1} \quad / \ x(2x-1)(2x+1)$$

$$\frac{1}{4}x^2+1=(4A+2B+2C)x^2+(B-C)x-A$$

$$\begin{array}{rcl} 4A+2B+2C & = & \frac{1}{4} \\ B-C & = & 0 \\ -A & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$A=-1, B=\frac{17}{16}, C=\frac{17}{16}$$

$$\frac{\frac{1}{4}x^2+1}{x(2x-1)(2x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{\frac{17}{16}}{2x-1}+\frac{\frac{17}{16}}{2x+1}$$

Integriranje svih članova rastava:

$$\frac{-3x^4+x^2+1}{4x^3-x}=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{x}+\frac{17}{16}\frac{1}{2x-1}+\frac{17}{16}\frac{1}{2x+1}$$

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2,\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|,\ \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1|,\ \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1|$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{-3x^4 + x^2 + 1}{4x^3 - x} dx = -\frac{3}{8}x^2 - \ln|x| + \frac{17}{32}\ln|2x-1| + \frac{17}{32}\ln|2x+1| + C =$$

$$= -\frac{3}{8}x^2 - \ln|x| + \frac{17}{32}\ln\left|4x^2 - 1\right| + C$$

□

Primjer 54. Odredi $\int \frac{x^5 + 1}{x^2 + 1} dx$.

Rješenje. Rastav integranda na polinom i pravu racionalnu funkciju:

x^5	x^4	x^3	x^2	x	1		djelitelj		količnik
x^5					$+1$	:	x^2+1	=	$x^3 - x$
$\pm x^5$		$\pm x^3$				r a s t a v			
		$-x^3$			$+1$				
		$\mp x^3$		$\mp x$		$\frac{x^5+1}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1}$			
				x	$+1$				

Integriranje svih članova rastava:

$$\frac{x^5 + 1}{x^2 + 1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4,\ \int x dx = \frac{1}{2}x^2,\ \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right),\ \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) + \arctan x + C$$

□

Primjer 55. Odredi $\int \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}dx$.

Rješenje. Rastav integranda na konstantu i pravu racionalnu funkciju:

x^3	x^2	x	1	djelitelj			količnik
$2x^3$	$+x^2$			$:$	x^3-1	$=$	2
$\pm 2x^3$			∓ 2	rastav			
	x^2		$+2$	$\frac{2x^3+x^2}{x^3-1}=2+\frac{x^2+2}{x^3-1}$			

Rastav prave racionalne funkcije:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

Integriranje svih članova rastava:

$$\frac{2x^3+x^2}{x^3-1}=2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\int dx=x,\ \int\frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|,\ \int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Zbrajanje izračunatih integrala:

$$\int\frac{2x^3+x^2}{x^3-1}dx=2x+\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

□

5. Integriranje funkcija s korijenom

Ponekad se integral funkcije koja sadrži neki korijen može pogodnom zamjenom svesti na integral racionalne funkcije.

Primjer 56. Pogodnom zamjenom, $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}dx$ svedi na integral racionalne funkcije, a zatim ga riješi.

Rješenje.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}dx \left\| \begin{matrix} \sqrt{x+1}=t \\ x+1=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right\| = \int \frac{t^2-1}{t-1}2tdt = \int \left(2t^2+2t\right)dt = \frac{2}{3}t^3+t^2+C_1 =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}+x+1+C_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}+x+C$$

□

Primjer 57. Odgovarajućom zamjenom, $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ prevedi u integral racionalne funkcije, a potom ga riješi.

Rješenje.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx \left\| \begin{matrix} \sqrt[4]{x}=t \\ x=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{matrix} \right\| = \int \frac{t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 4t-4\arctan t+C = 4\sqrt[4]{x}-4\arctan\sqrt[4]{x}+C$$

Dodatak. Rastav racionalne funkcije $\frac{t^2}{t^2+1}$, umjesto dijeljenja brojnika nazivnikom, se brže postiže "dodavanjem" nule brojniku u obliku $1-1$:

$$\frac{t^2}{t^2+1}=\frac{t^2+1-1}{t^2+1}=\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}=1-\frac{1}{t^2+1}$$

□

Primjer 58. Riješi $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$.

Rješenje.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx \left[\!\left[\begin{array}{c} \sqrt[6]{x}=t \\ x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array} \right]\!\right] = \int \frac{6t^5}{t^3-t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t-1}dt =$$

$$=6\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt+C=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|x-1|+C$$

Dodatak. Brzi rastav racionalne funkcije $\frac{t^3}{t-1}$:

$$\frac{t^3}{t-1}=\frac{t^3-1+1}{t-1}=\frac{t^3-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}=t^2+t+1+\frac{1}{t-1}$$

□

Primjer 59. Riješi $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-4x}{x}}dx$.

Rješenje. Uz zamjenu $\sqrt{\frac{1-4x}{x}}=t$ slijedi:

$$\frac{1-4x}{x}=t^2 \quad / \ x \qquad\qquad \frac{1}{x}=t^2+4$$

$$t^2x+4x=1 \qquad\qquad x=\left(t^2+4\right)^{-1}$$

$$x=\frac{1}{t^2+4} \qquad\qquad dx=\frac{-2t}{\left(t^2+4\right)^2}dt$$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-4x}{x}}dx \left[\!\left[\sqrt{\frac{1-4x}{x}} = t \right]\!\right] = \int \left(t^2+4\right) t \frac{-2t}{\left(t^2+4\right)^2} dt =$$

$$= \int \frac{-2t^2}{t^2+4} dt = \int \left(\frac{8}{t^2+4} - 2 \right) dt = 8\int \frac{1}{t^2+4} dt - 2\int dt =$$

$$= \frac{8}{2}\arctan\frac{t}{2} - 2t + C = 4\arctan\sqrt{\frac{1-4x}{4x}} - 2\sqrt{\frac{1-4x}{x}} + C$$

□

6. Integriranje trigonometrijskih funkcija

6.1. Integriranje umnožaka općih sinusa i kosinusa

Ako je podintegralna funkcija umnožak sinusa, ili sinusa i kosinusa, ili kosinusa, onda se možemo pomoći trigonometrijskim formulama koje umnožak pretvaraju u zbroj:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

Primjer 60. Izračunaj $\int \sin(x-1)\cdot\sin(3x-1)dx$.

Rješenje. Pretvaranje umnožka u zbroj za $\alpha = x-1$ i $\beta = 3x-1$:

$$\sin(x-1)\cdot\sin(3x-1) = \frac{1}{2}\cos(-2x) - \frac{1}{2}\cos(4x-2) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos(4x-2)$$

Integriranje pribrojnika:

$$\int \cos 2x dx \quad \left\| \begin{matrix} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right\| \quad = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int \cos(4x-2)dx \quad \left\| \begin{matrix} 4x-2 = t \\ dx = \frac{1}{4}dt \end{matrix} \right\| \quad = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t = \frac{1}{4}\sin(4x-2)$$

Završno rješenje:

$$\int \sin(x-1)\cdot\sin(3x-1)dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin(4x-2) + C$$

□

Primjer 61. Izračunaj $\int \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x dx$.

Rješenje. Pretvaranje umnožka u zbroj:

$$\sin x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\sin(-x) + \frac{1}{2}\sin 3x = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x$$

$$\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = -\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos 3x + \frac{1}{2}\sin 3x \cdot \cos 3x =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(-2x) + \frac{1}{2}\sin 4x\right] + \frac{1}{2}\left[\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 6x\right] = \frac{\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x}{4}$$

Integriranje pribrojnika:

$$\int \sin ax dx \quad \left\| \begin{matrix} ax = t \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{matrix} \right\| \quad = \frac{1}{a}\int \sin t dt = -\frac{1}{a}\cos t = -\frac{1}{a}\cos ax$$

Završno rješenje:

$$\int \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x dx = -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{24}\cos 6x + C$$

□

Primjer 62. Izračunaj $\int \cos^2(3x+4)\,dx$.

Rješenje. Pretvaranje umnožka u zbroj:

$$\cos(3x+4)\cdot\cos(3x+4)=\frac{1}{2}\cos 0+\frac{1}{2}\cos(6x+8)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(6x+8)$$

Integriranje pribrojnika:

$$\int dx = x,\ \int \cos(6x+8)\,dx=\frac{1}{6}\sin(6x+8)$$

Završno rješenje:

$$\int \cos^2(3x+4)\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin(6x+8)+C$$

□

6.2. Integriranje racionalnih izraza sa sinusom i kosinusom

Integral racionalnog izraza $f(\sin x,\cos x)$ s promjenljivim veličinama $\sin x$ i $\cos x$, se pomoću zamjene $\tan\frac{x}{2}=t$ (tzv. opća ili univerzalna trigonometrijska zamjena), svodi na integral racionalne funkcije s promjenljivom t. Nekad se takav integral može brže riješiti i zamjenom $\sin x = t$ ili $\cos x = t$ ili $\tan x = t$.

U cilju što bržeg i lakšeg rješavanja $\int f(\sin x,\cos x)\,dx$ preporučuje se postupno promatranje mogućih zamjena ovim redom:

(1) pokuša se zamjenom

$$\sin x = t \quad \text{ili} \quad \cos x = t$$

(2) ako je $f(-\sin x,-\cos x)=f(\sin x,\cos x)$, uvodi se zamjena

$$\tan x = t$$

iz koje slijedi

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \ , \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \ , \quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

(3) ako predhodne zamjene ne odgovaraju, uvodi se zamjena

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

iz koje slijedi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \ , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ , \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Primjer 63. Prikladnom zamjenom $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 3}dx$ svedi na integral racionalne funkcije, a zatim ga riješi.

Rješenje.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x+3}dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sin x+3}dx \ \left[\!\left[\begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right]\!\right] = \int \frac{-t^2+1}{t+3}dt =$$

$$= \int\left(-t+3-\frac{8}{t+3}\right)dt = -\int tdt + 3\int dt - 8\int\frac{1}{t+3}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + 3t - 8\ln\left|t+3\right| + C = -\frac{1}{2}\sin^2 x + 3\sin x - 8\ln\left(\sin x + 3\right) + C$$

Dodatak. Rastav racionalne funkcije $\frac{-t^2+1}{t+3}$:

t^2	t	1	djelitelj			količnik
$-t^2$		$+1$	:	$t+3$	$=$	$-t+3$
$\mp t^2$	$\mp 3t$		r a s t a v			
	$3t$	$+1$	$\frac{-t^2+1}{t+3} = -t+3-\frac{8}{t+3}$			
	$\pm 3t$	± 9				
		-8				

□

Primjer 64. Odredi $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx$.

Rješenje.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{\cos^2 x+1}dx \; \left[\!\left[\begin{matrix} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{matrix} \right]\!\right] =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = \int dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= t - 2\arctan t + C = \cos x - 2\arctan\left(\cos x\right) + C$$

□

Primjer 65. Odredi $\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos^3 x}dx$.

Rješenje. Provjera parnosti podintegralnog izraza:

$$f\left(-\sin x, -\cos x\right) = \frac{1}{\left(-\sin x\right)\cdot\left(-\cos x\right)^3} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos^3 x} = f\left(\sin x, \cos x\right)$$

Određivanje integrala zamjenom $\tan x = t$:

$$\int \frac{1}{\sin x \cdot \cos^3 x}dx \; [\![\tan x = t]\!] =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^3}} \frac{1}{1+t^2}dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t}dt = \int \left(t + \frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + \ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln\left|\tan x\right| + C$$

□

Primjer 66. Odredi $\int \frac{\cos x+2}{\cos x+1}dx$.

Rješenje. Provjera parnosti podintegralnog izraza:

$$f(-\sin x,-\cos x)=\frac{-\cos x+2}{-\cos x+1}\neq\frac{\cos x+2}{\cos x+1}=f(\sin x,\cos x)$$

Određivanje integrala zamjenom $\tan\frac{x}{2}=t$:

$$\int \frac{\cos x+2}{\cos x+1}dx \left[\!\left[\tan\frac{x}{2}=t\right]\!\right] =$$

$$=\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=\int \frac{t^2+3}{t^2+1}dt=\int\left(1+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\int dt+2\int\frac{1}{t^2+1}dt=t+2\arctan t+C=$$

$$=\tan\frac{x}{2}+2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)+C=x+\tan\frac{x}{2}+C$$

□

Primjer 67. Odredi $\int \frac{1}{\sin x-1}dx$.

Rješenje. Provjera parnosti integranda:

$$f(-\sin x,-\cos x)=\frac{1}{-\sin x-1}\neq\frac{1}{\sin x-1}=f(\sin x,\cos x)$$

Zamjena $\tan\frac{x}{2}=t$:

$$\int \frac{1}{\sin x - 1} dx \ \left[\!\left[\tan\frac{x}{2} = t \right]\!\right] = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - 1} \frac{2}{1+t^2} dt = -2\int \frac{1}{t^2 - 2t + 1} dt$$

Zamjena $t - 1 = s$:

$$\int \frac{1}{t^2 - 2t + 1} dt = \int \frac{1}{(t-1)^2} dt \ \left[\!\left[\begin{matrix} t-1=s \\ dt = ds \end{matrix} \right]\!\right] = \int \frac{1}{s^2} ds = -\frac{1}{s} = -\frac{1}{t-1}$$

Završno rješenje:

$$\int \frac{1}{\sin x - 1} dx = -2\left(-\frac{1}{t-1}\right) = \frac{2}{t-1} = \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + C$$

□