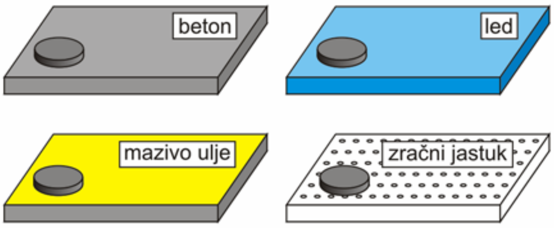
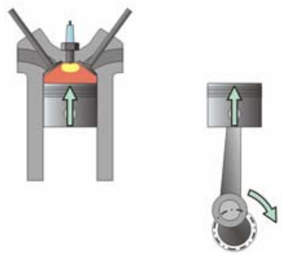
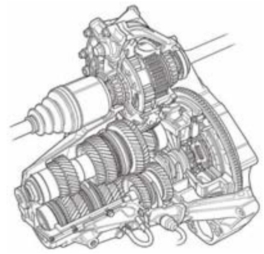
4.1 Zakon inercije – prvi Newtonov zakon

Dinamika širi kinematičke analize uzimajući u obzir <u>mase</u> tijela (materijalne točke). Prije svega izučava ovisnost gibanja o silama koje ga izazivaju (pokrenuti auto na guranje). ~~Za održavanje jednolikog pravocrtnog gibanja je potrebno stalno djelovanje sile.~~ ?

Inercija (mirovanje – tromost, gibanje – ustrajnost)– svojstvo tijela da se odupiru promjenama stanja gibanja. ($v = 0$ ili $v = C_v$)

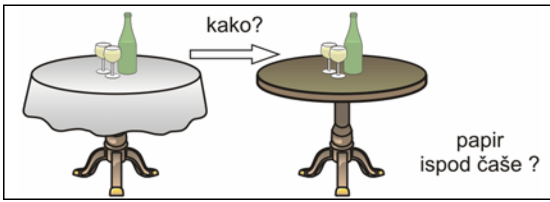
Zakon inercije (prvi Newtonov zakon) – stanje gibanja se ne mijenja (vlada ravnoteža) ako je rezultanta sila koje djeluju na tijelo jednaka nuli. (tijelo miruje ili se giba jednoliko pravocrtno) Vrijedi li pri kočenju/ubrzanju zakon inercija za putnika koji stoji u autobusu?

$$\boldsymbol{F}_R = \Sigma \boldsymbol{F}_i = 0 \qquad \text{(vektorski)}$$

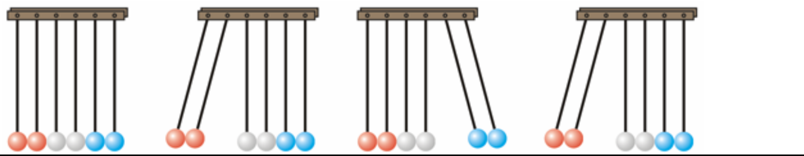
U pravcu rezultante sila: (određen je aktualni pravac – komponente)

$$F_R = m \circ a_R = 0 \qquad m \neq 0 \qquad a_R = 0 \qquad v = \int a_R \circ dt = a_R \circ \int dt = 0 + C_v = v_0 \qquad \text{(u trenutku } t_0 = 0\ v = v_0)$$

(a) tijelo miruje: $v_0 = 0$
(b) tijelo se giba jednoliko pravocrtno: $v_0 = C_v$



Newtonovo njihalo – jedan stupanj slobode gibanja: (koliko će dugo trajati njihanje)



I za održanje jednolikog kružnog (krivocrtnog) gibanja potrebno je stalno djelovanje sile (centripetalna sila). Kada na tijelo ne bi djelovala nikakva sila ono bi se gibalo jednoliko pravocrtno.

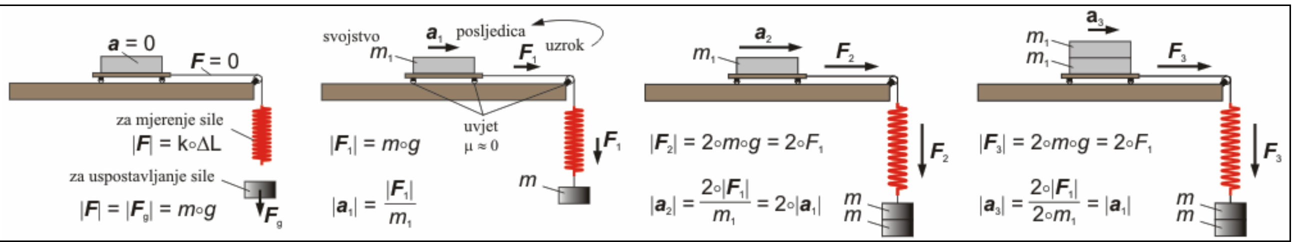
Tijelo će jednoliko rotirati (vrtnja) oko osi ako je:

$$\boldsymbol{M}_R = \Sigma \boldsymbol{M}_i = 0 \qquad \text{(krak centripetalne sile jednak je nuli)}$$

4.2 Sila, masa i ubrzanje – drugi Newtonov zakon

Rezultanta **sila** različita od nule: $\boldsymbol{F}_R = \Sigma \boldsymbol{F}_i \neq 0$ uzrokuje ubrzanje tijela, ako gibanje nije spriječeno. (Može li ubrzanje izazvati silu ?)

Primjer P-4.1: Kakva je razlika u slučajevima:
(a) $m \sim m_1$
(b) $m << m_1$
(c) $m >> m_1$



Temeljna jednadžba gibanja (na temelju koje se određuje gibanje tijela: a, v, s, pod utjecajem zadanih sila, $\boldsymbol{F}_R = \Sigma \boldsymbol{F}_i$):

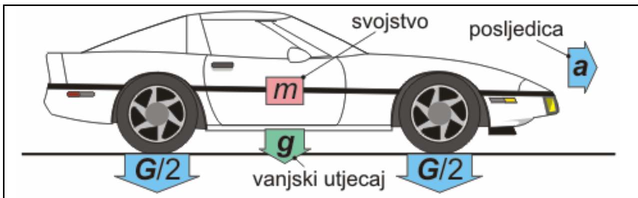
Drugi Newtonov zakon (matematički opis) $\quad \boldsymbol{a}_R = \dfrac{\boldsymbol{F}_R}{m}$ (vektorski) $\quad a_R = \dfrac{F_R}{m}$ (komponente, npr. u pravcu osi x)

Ubrzanje tijela (vektor) izravno je razmjerno sili (rezultantni vektor) koja djeluje na tijelo, a obrnuto je razmjerna masi tijela (skalarni pokazatelj otpornosti tijela promjeni stanja gibanja). Pravac i smjer ubrzanja se uvijek poklapaju s pravcem i smjerom sile koja ga uzrokuje.

$$\boldsymbol{F}_R = m \circ \boldsymbol{a}_R \qquad [\,|\boldsymbol{F}|\,] = [m] \circ [\,|\boldsymbol{a}|\,] = \text{kg} \circ \text{m} \circ \text{s}^{-2} \equiv \text{N}$$

Sila, $F = 1$ N (njutn – jedinica za silu), daje tijelu mase $m = 1$ kg ubrzanje $a = 1$ m/s^2. ($a = g \approx 10$ m/s^2 – ubrzanje zemljine teže)
Izračunavanja su složenija ako se sila koja djeluje na tijelo mijenja tijekom vremena ($F = f(t)$).
Tri važne opaske:

1. umjesto vektorske jednadžbe uglavnom se koriste skalarne jednadžbe s komponentama u koordinatnom sustavu 0,x,y,z:
$$F_{R,x} = \Sigma F_{x,i} = m \circ a_{R,x} = 0 \qquad F_{R,y} = \Sigma F_{y,i} = m \circ a_{R,y} = 0 \qquad F_{R,z} = \Sigma F_{z,i} = m \circ a_{R,z} = 0$$
2. samo vanjske sile uzrokuju ubrzanje sustava – djelovanja unutarnjih sila (između tijela koja su dijelovi aktualnog sustava) ne izazivaju ubrzanje (mogu li putnici pokrenuti autobus guranjem ne izlazeći iz autobusa)
3. kada se usvoji definicija "inercijalni sustavi" (što nije neizbježno) Newtonovi zakoni vrijede samo u inercijalnim sustavima.



Težina tijela (sila – uzajamno djelovanje tijela izazvana gravitacijom):

$$\boldsymbol{G} = m \circ \boldsymbol{g}, \ [\,|\boldsymbol{G}|\,] = \text{N}$$

Ne smije se brkati s **masom tijela** (svojstvo tijela koje ne ovisi o gravitaciji): $[m] = \text{kg}$.

g – ubrzanje slobodnog pada, posljedica F_g .
Ima li smisla ugraditi u vozilo mjerač ubrzanja?
Što je s $\boldsymbol{G}$ i ubrzanjem vozila na Mjesecu?

4.3 Granice referentnog sustava – neinercijalni sustavi i inercijalne sile

Inercijalni sustavi – sustavi u kojima vrijede temeljni Newtonovi zakoni gibanja. Iskustva pokazuju da takvi sustavi u odnosu na tlo miruju (pod sobe) ili se gibaju jednoliko pravocrtno (paluba broda koji plovi po bonaci). **Neinercijalni sustavi** – sustavi u kojima ne vrijede osnovni (Newtonovi) zakoni gibanja. Iskustva pokazuju da su takvi sustavi ubrzani/usporeni. (Je li moguće igrati bilijar na brodu ili u vlaku?)

mijenja li se masa i/ilisila teže i/ili težina tijela

Ovisno o postavljenim granicama, neinercijalni sustavi se mogu analizirati kao neinercijalni ili kao inercijalni. Promatrano iz inercijalnog sustava, tijelo (mase m) u ubrzanom/usporenom (neinercijalnom) sustavu teži održanju prvobitnog stanja gibanja. Sam neinercijalni sustav ima ubrzanje $\boldsymbol{a}_\mathrm{I}$. (Prodiskutirati slike – kako se pojave vide iz inercijalnog i neinercijalnog sustava.)

Promatrano iz neinercijalnog (ubrzanog/usporenog) sustava, na tijelo djeluje "**inercijalna sila**": (praktičan nenewtonski pristup)

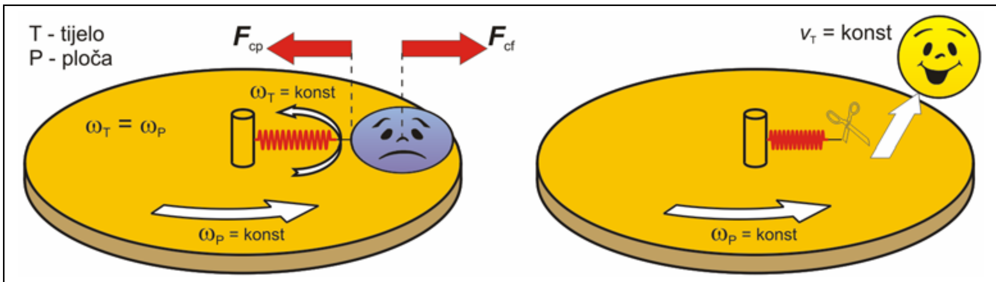
$$\boldsymbol{F}_\mathrm{I} = -\,m\circ\boldsymbol{a}_\mathrm{I} \qquad \text{(može li se izmjeriti neinercijalna sila)}$$

Inercijalna sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{I}$ nije posljedica uzajamnog djelovanja tijela (definicija sile i trenje) – ne javlja se protusila. (~~III Newtonov zakon~~).

U okomito k tlu Zemlje ubrzavanom sustavu: $\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{F}_\mathrm{g} + \boldsymbol{F}_\mathrm{I}$ s komponentama $\Rightarrow$ $G' = F_\mathrm{g} - F_\mathrm{I} = m\circ g - m\circ a_\mathrm{I} = m\circ(g - a_\mathrm{I})$

Pri slobodnom padu neinercijalnog sustava ($a_\mathrm{I} = -\,g$): (nacrtati teret u dizalu i ucrtati vektore ubrzanja i sila) $G' = m\circ(g - a_I) = 0$

U slučaju kružnog gibanja inercijalna sila se naziva **centrifugalnom silom** ($\boldsymbol{F}_\mathrm{cf}$), koja je u slučaju jednolikog kružnog gibanja jednakog intenziteta i pravca, te različitog smjera od **centripetalne sile** ($\boldsymbol{F}_\mathrm{cp}$). Centripetalna i centrifugalna sila nemaju isto hvatište.



- ➪ centripetalna sila je njutnovska (ima protusilu) – povlači tijelo k centru vrtnje, te se ono giba po kružnici
- ➪ centrifugalna sila je nenjutnovska – inercijalna je i nema protusilu
- ➪ centrifugalna sila zateže oprugu ?
- ➪ u trenutku prekida opruge obe se sile gube i tijelo se nastavlja gibati jednoliko u pravcu tangente

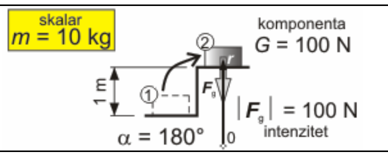
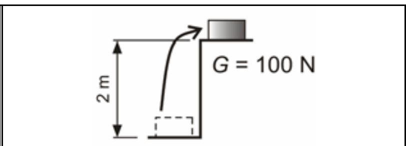
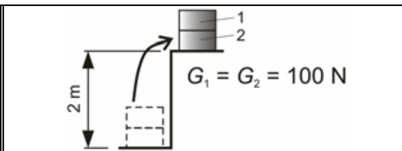
4.4 Rad i snaga

Rad – skalarna veličina kojom se opisuje razmjena mehaničke energije između sustava i okoline:

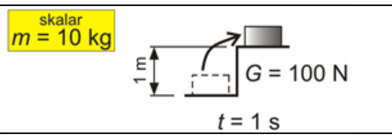
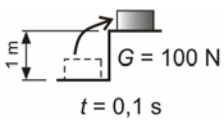
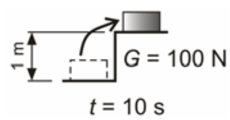
$$W = F\circ s \quad (?) \quad W = \boldsymbol{F}\circ\Delta\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{F}|\circ|\Delta\boldsymbol{r}|\circ\cos\alpha \quad \text{(skalarni produkt)} \quad \mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\circ\mathrm{d}\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{F}|\circ|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\circ\cos\alpha \quad W_{1/2} = \int_1^2 F\circ\cos\alpha\circ\mathrm{d}s$$

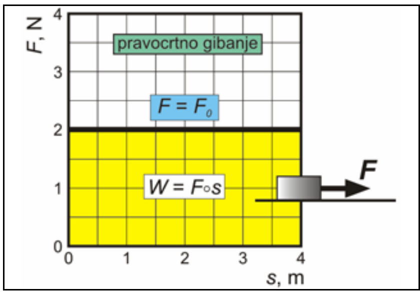
$$W = F\circ s\circ\cos\alpha \qquad [W] = [F]\circ[s] = \mathrm{N}\circ\mathrm{m} \equiv \mathrm{J} \qquad \text{(trigonometrijska kružnica)}$$

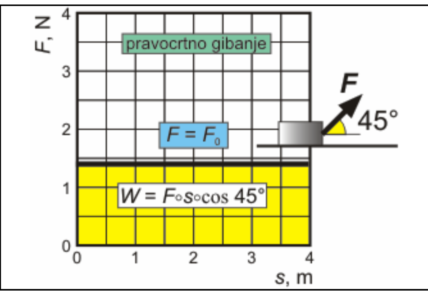
Rad je pozitivan ako su isti smjerovi vektora $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{r}$. U toplini, rad je pozitivan kada ga okolina vrši nad sustavom (povećanje energije sustava).

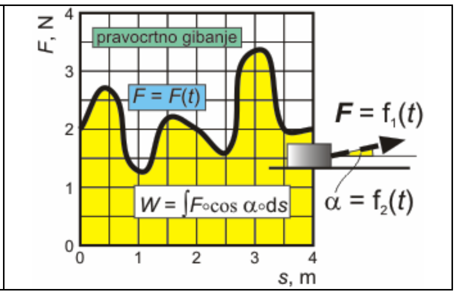
			Okolina vrši rad nad sustavom $\Rightarrow -\,W$. Raste potencijalna energija $\Rightarrow +\,\Delta E_\mathrm{p}$.
$W = 1\circ\mathrm{m}\circ 100\circ\mathrm{N}\circ(-1) = -\,100\ \mathrm{J}$	$W = 2\circ\mathrm{m}\circ 100\circ\mathrm{N}\circ(-1) = -\,200\ \mathrm{J}$	$W = 2\circ\mathrm{m}\circ 200\circ\mathrm{N}\circ(-1) = -\,400\ \mathrm{J}$	

Snaga – skalarna veličina kojom se opisuje brzinu obavljanja rada: $P \equiv \left|W/t\right|$ $\quad [P] = [W]/[t] = \mathrm{J}/\mathrm{s} \equiv \mathrm{W}$ $\quad P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$

		
$P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{100\circ\mathrm{J}}{1\circ\mathrm{s}} = 100\ \mathrm{W}$	$P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{100\circ\mathrm{J}}{0{,}1\circ\mathrm{s}} = 1000\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{kW}$	$P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{100\circ\mathrm{J}}{10\circ\mathrm{s}} = 10\ \mathrm{W}$



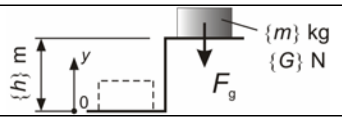




4.5 Mehanička, gravitacijska potencijalna i kinetička energija

Generalizirano, **energija** (mehanička, unutarnja, kemijska, nuklearna) , J (džul) – opisuje sposobnost sustava da izvrši promjene.
Mehanička energija E_m , J – opisuje sposobnost tijela (sustava) za obavljanje mehaničkog rada. Mehanička energija se razmjenjuje između sustava (obavljanje rada) pri čemu može mijenjati oblik pojavljivanja (kinetička ⇒ potencijalna).

Potencijalna energija E_p , J – opisuje energiju određenu položajem tijela (sustava). U gravitacijskom je polju Zemlje:



$E_{p,g} = m \circ g \circ h$ (gravitacijska potencijalna energija)

Pri podizanju tereta u polju Zemljine teže:

$$E_{p,g} = -W = -\int_0^h F_g \circ dy \circ \cos 180° = \int_0^h F_g \circ dy = \left| m \circ g \circ y \right|_0^h$$

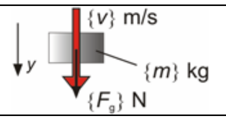
(povećanje $E_{p,g}$ tereta jednako je uloženom W dizanja)

$$E_{p,g} = m \circ g \circ h - m \circ g \circ 0 = m \circ g \circ h \qquad (g \approx 10\ \mathrm{m/s^2})$$

Primjer P-4.2: Kolika je potencijalna energija udarnog bata mase 100 kg podignutog na visinu od 2 m?

$$E_{p,g} = m \circ g \circ h = 100 \circ \mathrm{kg} \circ 10 \circ \mathrm{m} \circ \mathrm{s}^{-2} \circ 2 \circ \mathrm{m} = 1000 \circ \mathrm{N} \circ 2 \circ \mathrm{m} = 2000 \circ \mathrm{J} = 2\ \mathrm{kJ}$$

Kinetička energija E_k , J – opisuje energiju određenu gibanjem tijela (sustava).



$$E_k = \frac{m \circ v^2}{2}$$

Pri padu tereta u polju Zemljine teže (povećanje kinetičke energije tereta):

$$E_k = W = \int_0^v F_g \circ dy \circ \cos 0° = \int_0^v m \circ g \circ dy = \int_0^v m \circ \frac{dv}{dt} \circ dy = \int_0^v m \circ dv \circ \frac{dy}{dt}$$

$$E_k = \int_0^v m \circ \frac{dy}{dt} \circ dv = \int_0^v m \circ v \circ dv = \left| \frac{m \circ v^2}{2} \right|_0^v = \frac{m \circ v^2}{2} - 0 = \frac{m \circ v^2}{2}$$

Primjer P-4.3: Kolike su kinetičke energije praznog teretnog vozila ($_T$): mase 2 t koje se kreće brzinom od 72 km/h, i sportskog vozila ($_S$): mase 500 kg, koje se giba brzinom 144 km/h? (sportsko vozilo giba se dva puta većom brzinom: 72∘4 = 144 i ima četiri puta manju masu)

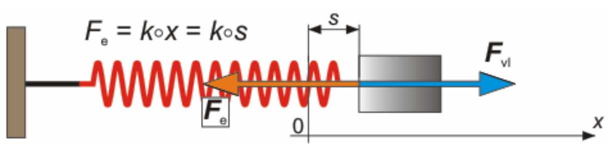
$$E_{k,T} = \frac{m \circ v^2}{2} = \frac{2000 \circ \mathrm{kg} \circ \left(72000 \circ \mathrm{m} / 3600 \circ \mathrm{s}\right)^2}{2} = 400000 \circ \mathrm{N} \circ \mathrm{m} = 0{,}4 \circ 10^6 \circ \mathrm{J} = 0{,}4\ \mathrm{MJ}$$

$$E_{k,S} = \frac{m \circ v^2}{2} = \frac{500 \circ \mathrm{kg} \circ \left(144000 \circ \mathrm{m} / 3600 \circ \mathrm{s}\right)^2}{2} = 400000 \circ \mathrm{N} \circ \mathrm{m} = 0{,}4 \circ 10^6 \circ \mathrm{J} = 0{,}4\ \mathrm{MJ}$$

Po jednom od pristupa, pri analizi energija i razmjena energija treba razlikovati generalizirane veličine: (a) **potencijal** – koji opisuje sposobnost sustava za razmjenu i (b) **naboj** – koji dopunjava opis određivanjem raspoložive količine. (h, $m \Rightarrow E_p$, v, $m \circ v \Rightarrow E_k$)

4.6 Elastična potencijalna i kinetička energija

Elastična potencijalna energija se pojavljuje u opterećenim (vlačno, tlačno) deformiranim krutim tijelima. Pod opterećenjem je osobito uočljiva deformacija opruge (krutosti k).



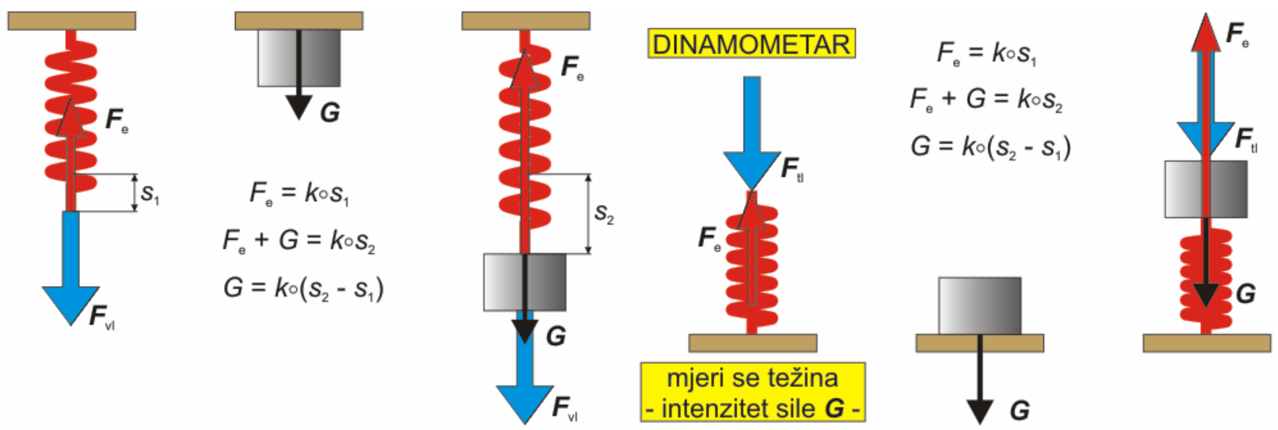
Kada se po opterećenju opruga produži za dužinu s i umiri, rezultanta je:
$\mathbf{F}_{vl} - \mathbf{F}_e = 0$ (vektorski) $F_{vl} - F_e = 0$ (komponente u pravcu x osi)
gdje je: $\mathbf{F}_{vl}$ – vlačna sila, (opterećenje)
$\mathbf{F}_e$ – elastična sila. ("povratna sila", koja teži kraj opruge vratiti u ravnotežni položaj)

Izvršeni rad deformacije opruge (W_D) akumuliran je kao potencijalna elastična energija opruge ($E_{p,e}$), koja se može iskoristiti za obavljanje ekvivalentnog rada opruge (W_O) pri njenom spontanom vraćanju u prvobitne dimenzije (povlačenje tereta):

$$W_D \Rightarrow E_{p,e} \Rightarrow W_O \qquad W_D = \int_0^s F_{vl} \circ dx \circ \cos\alpha = \int_0^s k \circ x \circ 1 \circ dx = \left| \frac{k \circ x^2}{2} \right|_0^s = \frac{k \circ s^2}{2} = E_{p,e}$$

Ako pri deformiranju opruge dođe do plastične deformacije (trajne promjene oblika) ekvivalentni dio rada biva nepovratno izgubljen.
Od trenutka oslobađanja kraja opterećene opruge počinje rasti kinetička energija:

$$E_k = \frac{m \circ v^2}{2} = \frac{m}{2} \circ \left(\int a \circ dt\right)^2 = \frac{m}{2} \circ \left(\int \frac{F_{p,e}}{m} \circ dt\right)^2 = \frac{1}{2 \circ m} \circ \left(\int F_{p,e} \circ dt\right)^2 = \frac{k}{2 \circ m} \circ \left(\int x \circ dt\right)^2 = C \circ \left(\int x \circ dt\right)^2 = W_D - E_{p,e,x}$$



4.7 Zakon očuvanja mehaničke energije i vrste sila

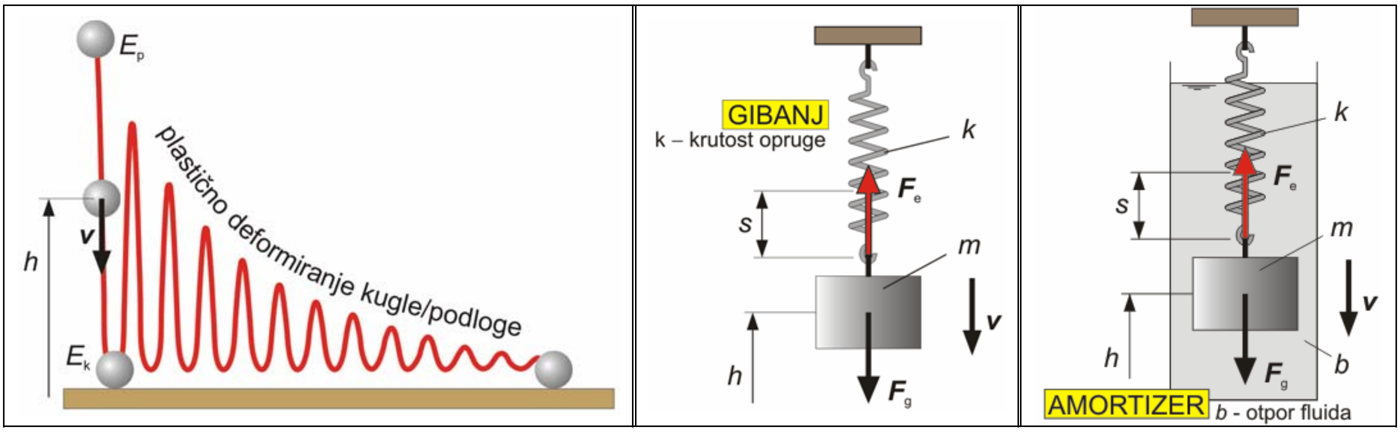
Generalizirano, **zakon očuvanja energije** – energija sustava se ne mijenja bez vanjskih utjecaja.

$$\Sigma E = C_E$$

Zakon očuvanja mehaničke energije – mehanička energija sustava se ne mijenja bez razmjene mehaničke energije s okolinom.

$$\Sigma E_m = E_p + E_k = C_E$$

U prirodi pretvorbe mehaničke energije $E_p \Leftrightarrow E_k$ prate i druge vrste razmjena energije s okolinom, najčešće, razmjene topline **(**plastične deformacije i trenje**)**, te se javlja "gubitak" mehaničke energije.



Nakon slobodnog pada, pri udaru kugle o tlo, kinetička se energija transformira u deformacije kugle i/ili tla, djelomično elastične **(**odbacivanje**)** i djelomično plastične **(**unutarnja energija**)**. Teorijski – apsolutno elastični i apsolutno plastični sudar?

Konzervativne sile – obavljeni rad:

(a) može biti izražen kao razlika potencijalne energije tijela prije početka i nakon kraja gibanja **(**$E_{k,0} = E_{k,1} = 0$**)**
(b) reverzibilan je – sustav nad kojim je obavljen rad može isti taj rad **(**$- W = + W$**)** obaviti na nekom drugom sustavu
(c) ne ovisi o putanji nego samo o početnoj i krajnjoj točki
(d) jednak je nuli ako se početna i krajnja točka poklapaju.

Nekonzervativne sile – obavljeni rad ne može biti izražen kao razlika potencijalne energije tijela na početku i kraju gibanja jer je:

⇨ $\Delta E_p > W$ – plastične deformacije, trenje,
⇨ $\Delta E_p < W$ – termička, fazna, kemijska, nuklearna energija.

4.8 Pretvaranje potencijalne u kinetičku energiju

Na temelju zakona o očuvanju mehaničke energije **(**E_m**)** i izvedenih izraza za gravitacijsku potencijalnu i kinetičku energiju slijedi:

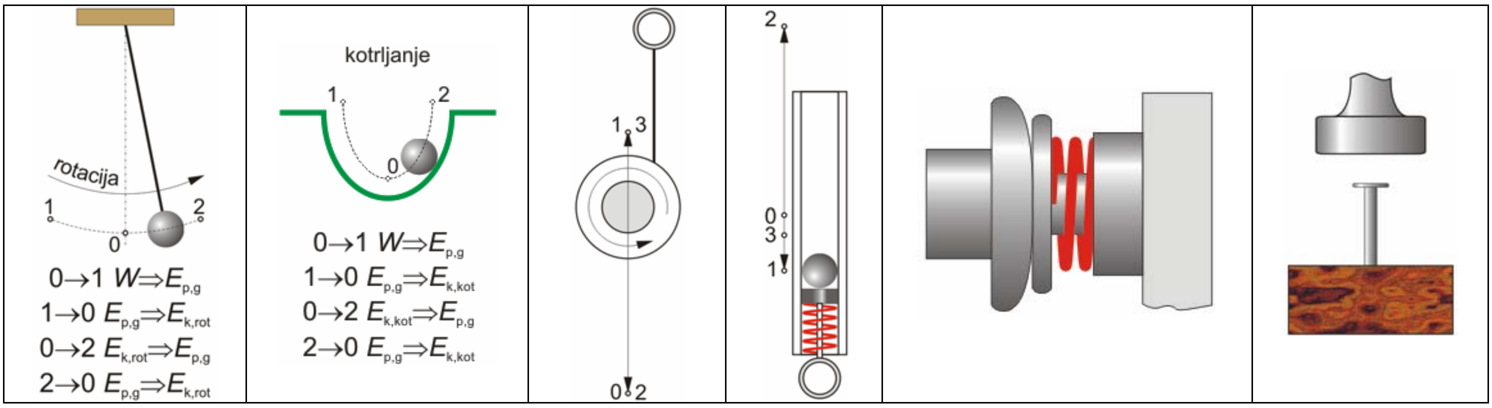
$$E_m = E_p + E_k = m \circ g \circ h + \frac{m \circ v^2}{2} = \text{konst}$$

Kada kugla u gravitacijskom polju Zemlje pada k tlu pretvara se njena potencijalna energija u kinetičku: **(**$t = \sqrt{2 \circ s / a}$, $v = a \circ t$ – tema 2.10**)**

h = 100 m	s = 0 m	g = 10 m/s²	t = 0 s	v = 0 m/s	(v = 0 km/h)	E_p = 1 kJ	E_k = 0 J	E_m = 1 kJ
h = 50 m	s = 50 m	g = 10 m/s²	t = 3,2 s	v = 32 m/s	(v = 120 km/h)	E_p = 0,5 kJ	E_k = 0,5 J	E_m = 1 kJ
h = 0 m	s = 100 m	g = 10 m/s²	t = 4,5 s	v = 45 m/s	(v = 160 km/h)	E_p = 0 kJ	E_k = 1 J	E_m = 1 kJ

Kada se kugla odbije od tla pretvara se njena kinetička energija u potencijalnu. **(**idealizacija: apsolutno elastični sudar, bez gubitaka trenja**)**

h = 100 m	s = 0 m	g = 10 m/s²	t = 4,5 s	v = 0 m/s	(v = 0 km/h)	E_p = 1 kJ	E_k = 0 J	E_m = 1 kJ
h = 50 m	s = 50 m	g = 10 m/s²	t = 3,2 s	v = 32 m/s	(v = 120 km/h)	E_p = 0,5 kJ	E_k = 0,5 J	E_m = 1 kJ
h = 0 m	s = 100 m	g = 10 m/s²	t = 0 s	v = 45 m/s	(v = 160 km/h)	E_p = 0 kJ	E_k = 1 J	E_m = 1 kJ



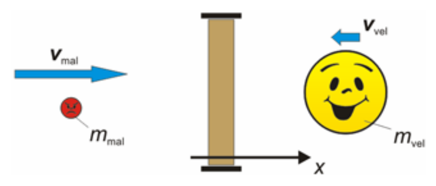
4.9 Količina gibanja, nalet i impuls sile

Količina gibanja (zamah), p, jedna je od vektorskih veličina kojima se opisuju svojstva gibajućih tijela (sustava tijela) – što je količina gibanja nekog tijela veća to je moguć njegov učinkovitiji nalet na drugo tijelo. Nalet tijela nije moguć bez prisutnosti drugog tijela, različite brzine od prvog (generalizirani potencijal). Pri naletu oba tijela mijenjaju količine gibanja (generalizirani naboj). Količina gibanja obuhvaća masu tijela i brzinu njegovog gibanja, a smjer vektora količine gibanja jednak je smjeru vektora brzine:

$$\boldsymbol{p} \equiv m\circ\boldsymbol{v} \qquad [|p|] = [m]\circ[|v|] = \text{kg}\circ\text{m}\circ\text{s}^{-1} \qquad p_x = m\circ v_x \qquad p_y = m\circ v_y \qquad p_z = m\circ v_z$$

(količina gibanja = umnošku mase i brzine tijela $\Rightarrow$ količina gibanja tijela raste s porastom mase i porastom brzine gibanja tijela)

Koristi se za rješavanje problema koji se ne mogu riješiti ili se teško rješavaju direktnom primjenom II Newtonovog zakona.



$$m_{vel} = 10\circ m_{mal} \qquad |v_{mal,x}| = |10\circ v_{vel,x}| \quad \text{(komponente u smjeru } x \text{ osi)}$$

$$p_{mal,x} = m_{mal}\circ v_{mal,x} \qquad p_{vel,x} = m_{vel}\circ(-v_{vel,x}) = -\, m_{vel}\circ v_{vel,x}$$

$$p_{mal,x} = \frac{m_{vel}}{10}\circ 10\circ v_{vel,x} = m_{vel}\circ v_{vel,x} \qquad p_{mal,x} = -\, p_{vel,x}$$

(jednaki su intenziteti količina gibanja lopti i biće jednake snage naleta lopti na stjenku)

Deriviranjem količine gibanja tijela po vremenu se dobiva:

$$\text{d}\boldsymbol{p} = m\circ\text{d}\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{a}}\circ\text{d}\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{F}}{\text{d}\boldsymbol{v}/\text{d}t}\circ\text{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\circ\text{d}t$$

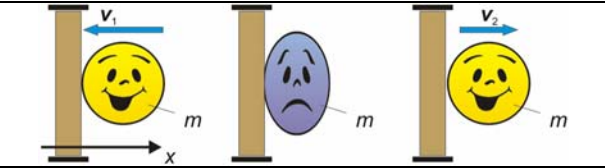
Newton je zakon inercije (drugi Newtonov zakon) pisao u obliku: $\boldsymbol{F} = \text{d}\boldsymbol{p}/\text{d}t$, a ne u obliku $\boldsymbol{F} = m\circ\boldsymbol{a} = \text{m}\circ\text{d}\boldsymbol{v}/\text{d}t$.

Impuls sile, I, jedna je od vektorskih veličina kojima se opisuju uzajamna mehanička djelovanja gibajućih tijela – što je impuls veći to će biti veći učinak naleta jednog tijela na drugo tijelo. Impuls obuhvaća silu (rezultantu) koja djeluje na tijelo i trajanje njenog djelovanja, a smjer vektora impulsa sile jednak je smjeru vektora sile. U infinitezimalnom vektorskom obliku:

$$\boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{F}\circ\text{d}t = \text{d}\boldsymbol{p} \qquad [|I|] = [|F|]\circ[t] = \text{N}\circ\text{s} = \text{kg}\circ\text{m}\circ\text{s}^{-2}\circ\text{s} = \text{kg}\circ\text{m}\circ\text{s}^{-1} \qquad I_x = F_x\circ\text{d}t \qquad I_y = F_y\circ\text{d}t \qquad I_z = F_z\circ\text{d}t$$

(impuls sile = umnošku sile i trajanja njenog djelovanja $\Rightarrow$ impuls sile raste s porastom sile i porastom vremena njenog djelovanja)

Problemi u izračunavanjima s impulsima se javljaju kada se sila mijenja tijekom sudara ($\boldsymbol{F} = \text{f}(t)$).



$$m = 0{,}1 \text{ kg} \qquad v_1 = 3 \text{ m/s} \qquad v_2 = 2 \text{ m/s} \qquad \Delta t_{1/2} = 0{,}01 \text{ s}$$

$$p_{1,x} = m\circ v_{1,x} = -\,0{,}3 \text{ kg}\circ\text{m}\circ\text{s}^{-1} \qquad p_{2,x} = m\circ v_{2,x} = 0{,}2 \text{ kg}\circ\text{m}\circ\text{s}^{-1}$$

$$I_x = p_{2,x} - p_{1,x} = 0{,}2 - (-0{,}3) = 0{,}5 \text{ N}\circ\text{s}$$

$$F_{sr} = I_x / \Delta t_{1/2} = 0{,}5 / 0{,}01 = 50 \text{ N}$$

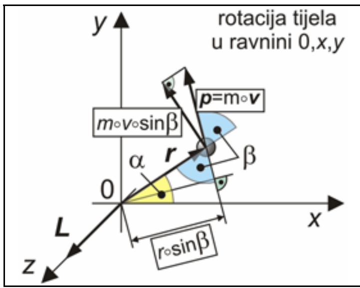
4.10 Moment količine gibanja i impuls momenta

Moment količine gibanja, $\boldsymbol{L}$, jedna je od vektorskih veličina kojima se opisuju svojstva rotirajućih tijela – što je moment količine gibanja nekog tijela veći to je moguć njegov snažniji nalet na drugo tijelo. Moment količine gibanja obuhvaća količinu gibanja i radijus vektor, a odnos momenta količine gibanja i količine gibanja isti je kao i odnos momenta i sile (statika):

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \qquad [|L|] = [|r|]\circ[|p|] = \text{m}\circ\text{kg}\circ\text{m}\circ\text{s}^{-1} = \text{kg}\circ\text{m}^2\circ\text{s}^{-1}$$

[moment količine gibanja = umnošku radijvektora i količine gibanja $\Rightarrow$ moment količine gibanja tijela raste s porastom radijvektora i porastom količine gibanja (porastom mase i porastom brzine gibanja)]

Koristi se u rješavanju problema koji se ne mogu riješiti ili se teško rješavaju direktnom primjenom II Newtonovog zakona.



Za bilo koji kut β:

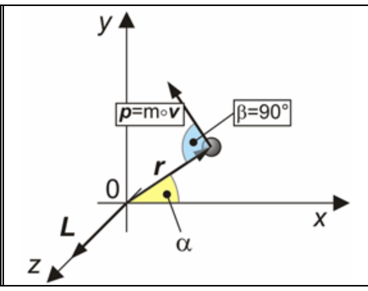
$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$

$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r}|\circ|\boldsymbol{p}|\circ\sin\beta$

$L = r\circ p\circ\sin\beta$

$L = r\circ m\circ v\circ\sin\beta$

($r\circ\sin\beta$ = "krak" momenta)



Za $\beta = 90°$ ($\pi/2$):

$L = r\circ m\circ v\circ\sin 90°$

$L = r\circ m\circ r\circ\omega\circ 1$

$L = m\circ r^2\circ\omega\circ 1$

$m\circ r^2 = I$

$L = I\circ\omega$

I – moment inercije

Za $\beta = 90°$ (jednoliko kružno gibanje): $L = I\circ\omega$ $\Rightarrow$ pravac vektora $\boldsymbol{L}$ se poklapa s z osi, a smjer je određen pravilom desne ruke. Prema tome, pokazatelj je tromosti tijela kod rotacije **moment inercije**, (kod pravocrtnog gibanja masa).

Moment inercije sustava se dobiva sumiranjem momenata inercije dijelova: $I = \sum_{i=1}^{n} m_i\circ r_i^2$, odnosno: $I = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i\circ r_i^2 = \int r^2\circ\text{d}m$

Deriviranjem momenta količine gibanja po vremenu se dobiva:

$$\frac{\text{d}\boldsymbol{L}}{\text{d}t} = \frac{\text{d}(r\times p)}{\text{d}t} = \frac{\text{d}r}{\text{d}t}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\frac{\text{d}p}{\text{d}t} = \boldsymbol{v}\times(m\circ\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}\circ m + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} \qquad (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} = v\circ v\circ\sin 0° = 0)$$

Impuls momenta , τ, jedna je od vektorskih veličina kojima se opisuju uzajamna djelovanja rotirajućih tijela – što je impuls momenta veći to će biti veći učinak naleta jednog tijela na drugo tijelo. Impuls obuhvaća moment (rezultante) koji djeluje na tijelo i trajanje njegovog djelovanja, a smjer vektora impulsa momenta jednak je smjeru vektora momenta. U diferencijalnom vektorskom obliku:

$$\text{d}\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{M}\circ\text{d}t = \text{d}\boldsymbol{L} \qquad [|\tau|] = [|M|]\circ[t] = \text{N}\circ\text{m}\circ\text{s} = \text{kg}\circ\text{m}\circ\text{s}^{-2}\circ\text{m}\circ\text{s} = \text{kg}\circ\text{m}^2\circ\text{s}^{-1}$$

4.11 Zakoni o očuvanju količine i momenta količine gibanja

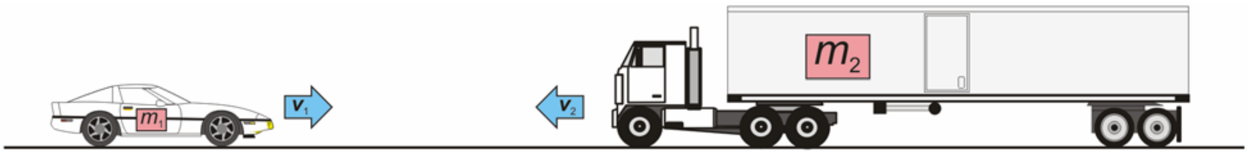
Zakoni o očuvanju količine i momenta količine gibanja se koriste za rješavanje problema gibanja u sustavima formiranim od dva ili više tijela koja ispoljavaju mehanička uzajamna djelovanja (unutarnje sile i unutarnji momenti), bez djelovanja vanjskih sila i momenata («zatvoreni sustavi»).

Zakon o održanju količine gibanja – ako je $\Sigma \boldsymbol{F}_\mathrm{i} = 0$ (odsustvo djelovanja vanjskih sila) količina gibanja sustava se ne mijenja:

$$\sum_\mathrm{i} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\mathrm{i}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{(promjene količina gibanja dijelova sustava)}$$

odakle se integriranjem dobiva:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{p}_\mathrm{i} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} m_\mathrm{i} \circ \boldsymbol{v}_\mathrm{i} = \boldsymbol{C}_\mathrm{p}$$



Zakon o održanju momenta količine gibanja – ako je $\Sigma \boldsymbol{M}_\mathrm{j} = 0$ (odsustvo djelovanja vanjskih momenata) moment količine gibanja sustava se ne mijenja:

$$\sum_\mathrm{j} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_\mathrm{j}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{(promjene momenata količina gibanja dijelova sustava)}$$

odakle se integriranjem dobiva:

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{L}_\mathrm{j} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{r}_\mathrm{j} \circ \left(m_\mathrm{j} \circ \boldsymbol{v}_\mathrm{j}\right) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} I_\mathrm{j} \circ \omega_\mathrm{i} = \boldsymbol{C}_\mathrm{L}$$

Zbrajaju se vektori jer su količine gibanja i momenti količine gibanja vektori. Pri tome se najčešće koriste komponente.

$C_{\mathrm{p,x}} = \Sigma p_{\mathrm{i,x}}$ $\quad C_{\mathrm{p,y}} = \Sigma p_{\mathrm{i,y}}$ $\quad C_{\mathrm{p,z}} = \Sigma p_{\mathrm{i,z}}$ $\qquad C_{\mathrm{L,x}} = \Sigma L_{\mathrm{i,x}}$ $\quad C_{\mathrm{L,y}} = \Sigma L_{\mathrm{i,y}}$ $\quad C_{\mathrm{L,z}} = \Sigma L_{\mathrm{i,z}}$

4.12 Količina gibanja i impuls, kinetička energija i rad

Količina gibanja i kinetička energija su fizičke veličine kojima se opisuju svojstva tijela (sustava) koje se giba, a impuls i rad su veličine kojima se opisuju uzajamna djelovanja tijela (sustava).

Matematički opis količine gibanja i kinetičke energije (pravocrtno gibanje):

količina gibanja:	kinetička energija:
$p = m \circ v$	$E_\mathrm{k} = \dfrac{m \circ v^2}{2}$

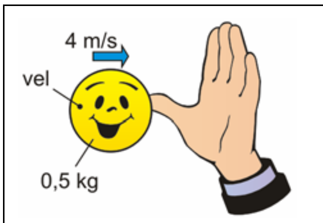
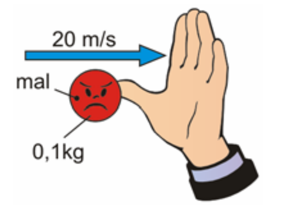
Fizički – obje su veličine razmjerne masi, međutim, količina gibanja je linearno razmjerna brzini, a kinetička energija razmjerna polovici vrijednosti kvadrata brzine. (Što se može zaključiti?)

Matematički opis impulsa i rada (pravocrtno gibanje):

impuls:	rad:
$I_{1/2} = \Delta p_{1/2} = m \circ \Delta v_{1/2} = F \circ \Delta t_{1/2}$	$W_{1/2} = \Delta E_{\mathrm{k},1/2} = \dfrac{m \circ \Delta v_{1/2}{}^2}{2} = F \circ \Delta s_{1/2}$

Fizički – količina gibanja iskazuje posljedice djelovanja sile (uzajamno djelovanje dva tijela) tijekom vremena $\Delta t_{1/2}$, a kinetička energija opisuje posljedice djelovanja sile tijekom prelaska puta $\Delta s_{1/2}$.

Praktična primjena – koja se lopta mora opreznije zaustavljati ($v_{\mathrm{mal},2} = v_{\mathrm{vel},2} = 0$ m/s):

	$p_{\mathrm{vel},1} = m_\mathrm{vel} \circ v_{\mathrm{vel},1} = 2$ kg∘m∘s^{-1} $E_{\mathrm{k,vel},1} = \dfrac{m_\mathrm{vel} \circ v_{\mathrm{vel},1}{}^2}{2} = 4$ J $p_{\mathrm{vel},2} = 0$ kg∘m∘s^{-1} $\quad E_{\mathrm{k,vel},2} = 0$ J $I_{\mathrm{vel},1/2} = \Delta p_{\mathrm{vel},1/2} = 2$ kg∘m∘s^{-1} $W_{\mathrm{vel},1/2} = \Delta E_{\mathrm{vel,k},1/2} = 4$ J		$p_{\mathrm{mal},1} = m_\mathrm{mal} \circ v_{\mathrm{mal},1} = 2$ kg∘m∘s^{-1} $E_{\mathrm{k,mal},1} = \dfrac{m_\mathrm{mal} \circ v_{\mathrm{mal},1}{}^2}{2} = 20$ J $p_{\mathrm{mal},2} = 0$ kg∘m∘s^{-1} $\quad E_{\mathrm{k,mal},2} = 0$ J $I_{\mathrm{mal},1/2} = \Delta p_{\mathrm{mal},1/2} = 2$ kg∘m∘s^{-1} $W_{\mathrm{mal},1/2} = \Delta E_{\mathrm{mal,k},1/2} = 20$ J

Svojstva tijela koja se gibaju: obje lopte imaju istu količinu gibanja, a različite kinetičke energije.

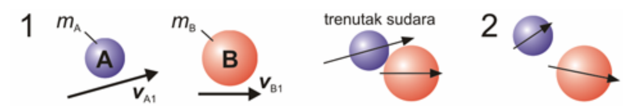
Pretpostavimo da obje lopte zaustavljamo s istom silom (F – mišići kao opruga) za isto vrijeme ⇒ $I_{\mathrm{mal},1/2} = I_{\mathrm{vel},1/2}$ – u oba slučaja su razmijenjeni jednaki impulsi.

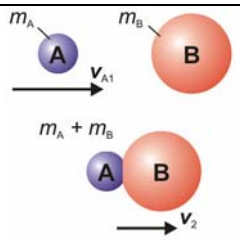
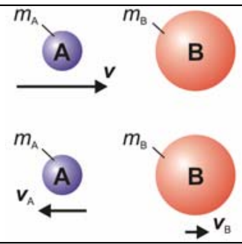
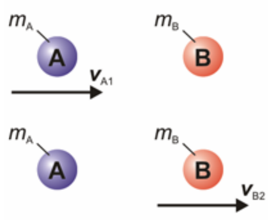
Međutim, kako je $W_{\mathrm{mal},1/2} = 5 \circ W_{\mathrm{vel},1/2}$ – pri zaustavljanju brže (male) lopte ruka će izvršiti pet puta veći rad, te biti potisnuta na pet puta veću daljinu u smjeru gibanja loptice jer je $\Delta s = \Delta W / F$.

4.13 Sudari

Plastični sudari (idealni) – pri sudaru se tijela plastično deformiraju, spoje i nastave kretati kao jedna cjelina (po definiciji, isključena elastična deformacija koja bi tijela odbila jedno od drugoga).
Elastični sudari (idealni) – pri sudaru se tijela deformiraju samo elastično – ne i plastično, te prije i poslije sudara imaju jednaku kinetičku energiju kao i prije sudara (po definiciji, isključeno je smanjenje kinetičke energije uslijed rada deformiranja tijela).
Mješoviti elastično-plastični sudari (realno) – pri sudaru se tijela deformiraju i potom razdvajaju.

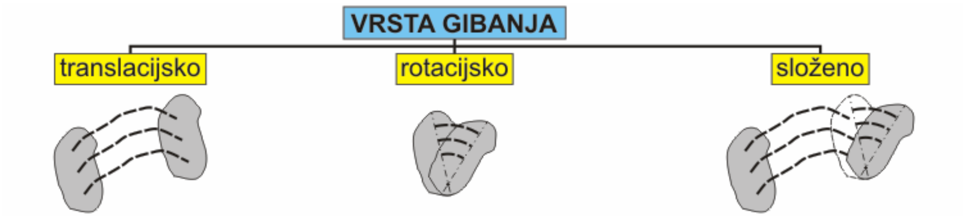
zakon o održanju količine gibanja:	zakon o održanju energije:
$\Sigma\, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{C}_\mathrm{p}$ (vektorski)	$\Sigma\, E = C_\mathrm{E}$ (skalari)

	$\boldsymbol{p}_{A,1} + \boldsymbol{p}_{B,1} = \boldsymbol{p}_{A,2} + \boldsymbol{p}_{B,2} = m_{A,1} \circ \boldsymbol{v}_{A,1} + m_{B,1} \circ \boldsymbol{v}_{B,1}$ $E_{A,1} + E_{B,1} = E_{A,2} + E_{B,2} = \frac{m_{A,1} \circ v_{A,1}^2}{2} + \frac{m_{B,1} \circ v_{B,1}^2}{2}$

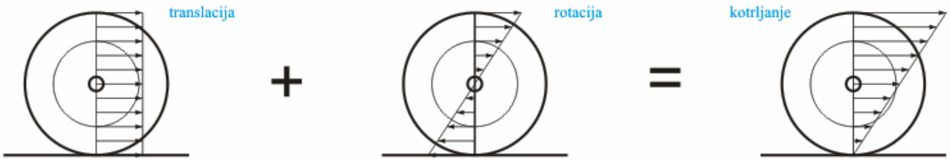
plastični sudar uz uvjete: $v_{B1} = 0,\ v_{A2} = v_{B2} = v_2$	**elastični sudar uz uvjete:** $v_{B2} = 0$	**elastični sudar uz uvjete:** $v_{B2} = 0,\ m_A = m_B$
		
$v_2 = \frac{m_A}{m_A + m_B} \circ v_{A1}$ $\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{m_A}{m_A + m_B}$ (izvesti)	$v_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \circ v$ $v_B = \frac{2 \circ m_A}{m_A + m_B} \circ v$ (izvesti)	(izvesti)

4.14 Opis gibanja krutog tijela

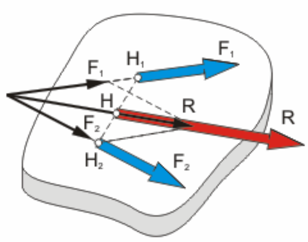
Kruto tijelo – tijelo koje ne mijenja oblik i veličinu, te se ne mijenja ni razmak bilo kojih točaka tijela.

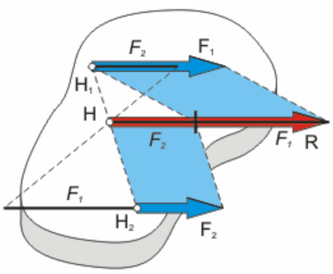


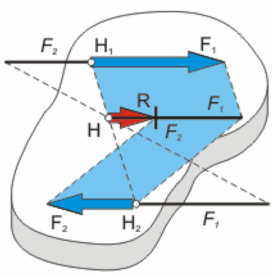
Translacijsko gibanje krutog tijela – sve točke krutog tijela imaju podudarne putanje, te je dovoljno opisati gibanje samo jedne točke tijela. Putanje translacijskog gibanja mogu biti krivocrtne i pravocrtne – krivocrtno i pravocrtno gibanje.
Rotacijsko gibanje krutog tijela – u tijelu ili izvan tijela postoji pravac – **os rotacije** – na kojem sve točke miruju tijekom gibanja tijela. Sve ostale točke tijela se kreću po kružnicama u ravninama okomitim na os rotacije, sa središtem na osi rotacije. Prema tome, kruto tijelo rotira (vrti se) oko osi rotacije (vrtnje). Sve točke krutog tijela imaju jednake kutne brzine, dok jednake obodne brzine i obodna ubrzanja imaju čestice koje se nalaze na jednakim najkraćim udaljenostima (u ravnini okomitoj na os vrtnje) od osi vrtnje.
Složeno gibanje krutog tijela – može se opisati kombiniranjem translacijskog i rotacijskog gibanja, na primjer, kotrljanje:



Kod složenih gibanja dostignuti položaj ne ovisi o tome odvijaju li se aktualna jednostavna gibanja istovremeno ili jedno za drugim.







4.15 Centar masa i moment inercije

Centar masa tijela ili sustava tijela se po definiciji nalazi u točki s koordinatama:

$$x_{cm} = \frac{m_1 \circ x_1 + m_2 \circ x_2 + \ldots + m_n \circ x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \circ x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_{cm} = \frac{m_1 \circ y_1 + m_2 \circ y_2 + \ldots + m_n \circ y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \circ y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Za homogena tijela sumu zamjenjuje integral. Kada homogeno tijelo ima geometrijski centar (kugla), u njemu se nalazi i centar masa, a kada tijelo ima os simetrije (kotač) na njoj se nalazi i centar masa. Centar masa se ne mora nalaziti u tijelu.

Prema tome, tijelo na koje djeluju vanjske sile giba se (uslijed djelovanja rezultante vanjskih sila) kao da se sva njegova masa nalazi u centru masa.

Deriviranjem po vremenu ($dx/dt = v$) dobiva se brzina gibanja centra masa:

$$v_{x,cm} = \frac{m_1 \circ v_{x,1} + m_2 \circ v_{x,2} + \ldots + m_n \circ v_{x,n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \circ v_{x,i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad v_{y,cm} = \frac{m_1 \circ v_{y,1} + m_2 \circ v_{y,2} + \ldots + m_n \circ v_{y,n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \circ v_{y,i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

U vektorskom obliku su položaj i brzina centra masa:

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{m_1 \circ \boldsymbol{r}_1 + m_2 \circ \boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_n \circ \boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \circ \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \boldsymbol{v}_{cm} = \frac{m_1 \circ \boldsymbol{v}_1 + m_2 \circ \boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n \circ \boldsymbol{v}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \circ \boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Kako je zbroj masa dijelova tijela jednak ukupnoj masi tijela ($\Sigma\, m_i = m_u$) slijedi:

$$m_u \circ \boldsymbol{v}_{cm} = m_1 \circ \boldsymbol{v}_1 + m_2 \circ \boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n \circ \boldsymbol{v}_n = \Sigma\, m_i \circ \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{P}$$

Prema tome, količina gibanja tijela jednaka je umnošku mase tijela (sustava tijela) i brzine gibanja njegovog centra masa, te:

(a) ako na tijelo ne djeluju vanjske sile – centar masa se kreće jednoliko pravocrtno,
(b) ako na tijelo djeluju vanjske sile brzina gibanja centra masa se mijenja (po intenzitetu ili/i pravcu).

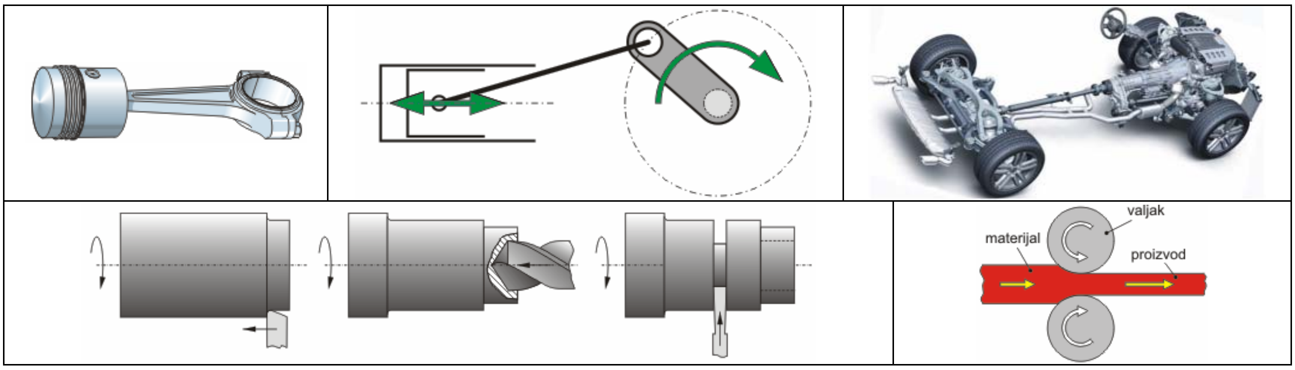
Deriviranjem po vremenu ($dv/dt = a$) dobiva se: $m_u \circ \boldsymbol{a}_{cm} = m_1 \circ \boldsymbol{a}_1 + m_2 \circ \boldsymbol{a}_2 + \ldots + m_n \circ \boldsymbol{a}_n = \Sigma\, m_i \circ \boldsymbol{a}_i \qquad \Sigma\, \boldsymbol{F} = m_u \circ \boldsymbol{a}_{cm}$

Ukupna kinetička energija tijela jednaka je zbroju kinetičke energije translacijskog gibanja centra masa tijela i kinetičke energije rotacijskog gibanja tijela oko osi koja prolazi kroz centar masa:

$$E_k = E_{k,trn} + E_{k,rot} = \frac{m \circ v^2}{2} + \frac{I \circ \omega^2}{2}$$

4.16 Stapni mehanizam – usporedba pravocrtnog i kružnog gibanja

Stapni mehanizam – pretvaranje pravocrtnog gibanja stapa motora s unutarnjim izgaranjem (u cilindru) u kružno gibanje koljenastog vratila. (zamašnjak, spojka, mjenjač, diferencijal, kotači)



Pravocrtno gibanje se opisuje sa: putom (s), brzinom (v), ubrzanjem (a), silom (F) i masom (m), a kružno analognim veličinama (vrtnja, rotacija) opisuje sa: kutom (φ), kutnom brzinom (ω), kutnim ubrzanjem (α), zakretnim momentom (M) i momentom inercije (I).

Pravocrtno gibanje			Kružno gibanje		
put	s	m	kut	φ	rad
brzina	v	m/s	kutna brzina	ω	rad/s
ubrzanje	a	m/s^2	kutno ubrzanje	α	rad/s^2
masa	m	kg	moment inercije	I	kg∘m^2
jednadžba gibanja	$F = m \circ a$	N	moment sile	$M = I \circ \alpha$	N∘m
količina gibanja	$m \circ v$	kg∘(m/s)	zamah	$I \circ \omega$	kg∘(m^2/s)
rad	$F \circ s$	J	rad	$M \circ \varphi$	J
kinetička energija	$\frac{m \circ v^2}{2}$	J	kinetička energija	$\frac{I \circ \omega^2}{2}$	J
snaga	$F \circ v$	W	snaga	$I \circ \omega$	W

* Jedinica za kut, radijan (rad), često se ne piše i podrazumijeva.