

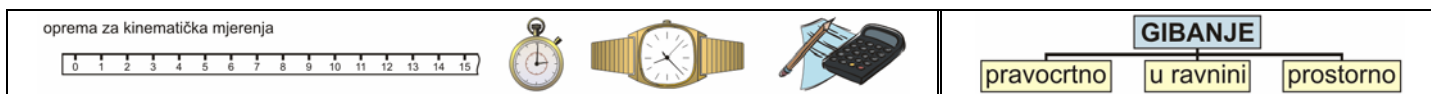
## 2.1 Položaj, gibanje i jednačba gibanja tijela

**Kinematika** je dio mehanike koji proučava i opisuje gibanja tijela, ne obazirući se na uzroke gibanja (dinamika).

**Gibanje tijela** – promjena položaja tijela u prostoru tijekom vremena (oblika pojavljivanja gibanja materije). Opis može biti:

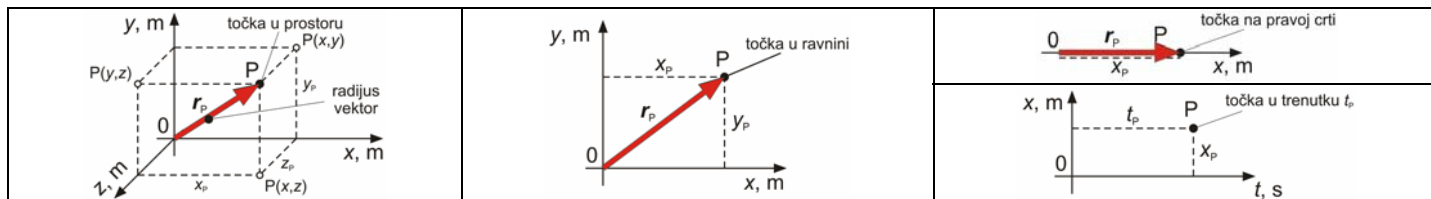
- ⇒ tablični (aritmetika) ⇒ u pravilu su prikazani rezultati mjerenja s «točnim» vrijednostima u mjernim točkama,
- ⇒ grafički (geometrija) ⇒ dijagram s krivuljom daje jasnu vizualnu predodžbu o prirodi gibanja i
- ⇒ veličinska jednačba (algebra) ⇒ izvedena formula koja je najpodesnija za rad uz korištenje kompjutera.

Gibanja su u praksi najčešće nepravilna i ne mogu se vjerno opisati jednostavnim veličinskim jednačbama (vozilo SB ÷ Zg).



**Materijalna točka**, skraćeno **točka**, tijelo je zanemarivih dimenzija, mase  $m$  (masa je izvan okvira kinematičke, u okvirima statičke i dinamičke analize). Kada su dimenzije gibanja zanemarive u usporedbi s geometrijom položaja/gibanja, opis položaja/gibanja točke je dovoljan i za opis položaja/gibanja tijela (vlak SB ÷ Zg). Dalje se bez posebne napomene kako se giba podrazumijeva gibanje točke.

Položaji i gibanja u prostoru se najčešće analiziraju u referentnom pravokutnom koordinatnom sustavu, definiranom s ishodištem 0 i koordinatnim osima  $x, y, z$ . Kod gibanja u ravnini se koristi koordinatni sustav  $0, x, y$ , a kod pravocrtnog gibanja  $0, x$  (vrijeme  $t$ ?).



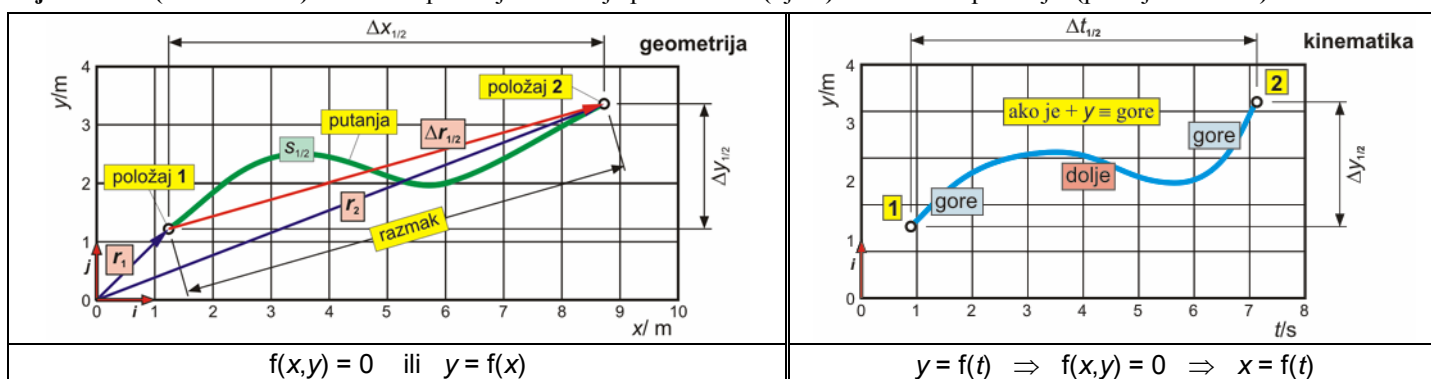
Dijagrami u koordinatnim sustavima  $0, x, y, z$ ,  $0, x, y$ ,  $0, x$  su geometrijskog karaktera (autokarta SB ÷ Zg), dok su dijagrami u koordinatnim sustavima  $0, x, t$ ,  $0, y, t$  i  $0, z, t$  kinematičkog karaktera ( $0, x, y, z, t$ ?).

**Položaj točke (P)** – određen je vektorom položaja  $r_P$  (radijus vektorom), koji spaja ishodište i točku P, ili s odgovarajućim brojem komponentnih vektora. **Jednačba gibanja** – matematički opis gibanja (promjene položaja u prostoru ⇒ brzine i ubrzanja), u vektorskom obliku:  $r = f(t)$  (što se može opisati tim oblikom, bez razlaganja na ravnine?) ili s odgovarajućim brojem skalarnih jednačbi.

	u prostoru	u ravnini	na pravoj crti
položaj točke	$x, y, z$	$x, y$	$x$
jednačba gibanja	$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$	$x = f_1(t), y = f_2(t)$	$x = f_1(t)$

## 2.2 Putanja, razmak i put

**Putanja** ili staza (slika ili crtež) – niz svih položaja kroz koje prođe točka (tijelo) između dva položaja. (putanja SB ÷ Os)

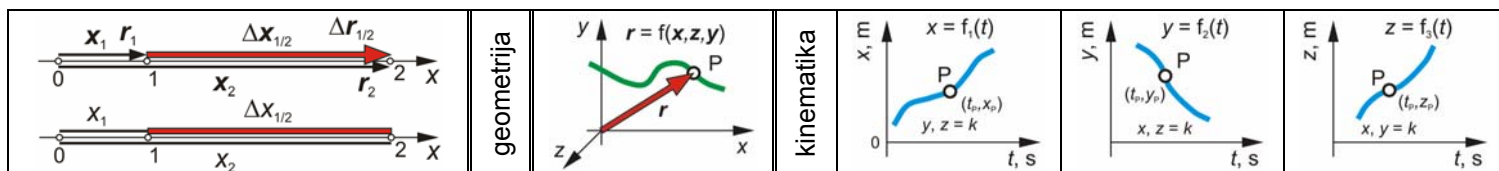


**Razmak** ( $\Delta r_{1/2}$  ili  $\Delta x_{1/2}, \Delta y_{1/2}, \Delta z_{1/2}$ ) – vektorska veličina kojom se opisuje najkraća moguća putanja (prava crta) između dva položaja (1 i 2). Simbolom  $\Delta r_{1/2}$  se označava razlika konačnog (položaj 2) i početnog (položaj 1) vektora položaja:  $\Delta r_{1/2} = r_2 - r_1$  (vektori).

**Put** ( $s_{1/2}, m$ ) – skalarna duljina putanje. Ne smije se miješati s razmakom koji je između dva položaja jedinstvene vrijednosti, dok to put nije (put i razmak SB ÷ Os). Ako putanja nije pravocrtna ili kružna, u pravilu se put s teško izračunava i mora se izmjeriti. (kilometar-sat) Prijeđeni razmak između dva položaja naziva se **pomakom** (razmak/pomak SB ÷ Os).

Opis gibanja (matematika i/ili statistika) je vjerniji što je vremenski interval ( $\Delta t_{1/2}$ ) određivanja (mjerenja) kraći.

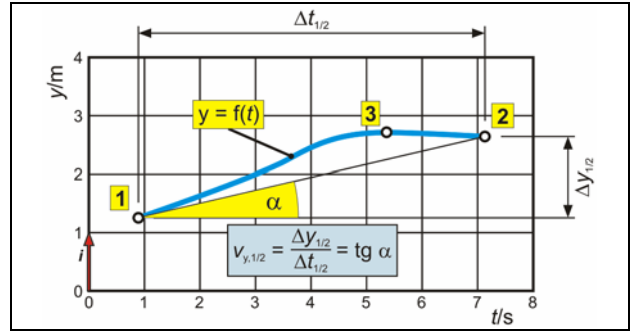
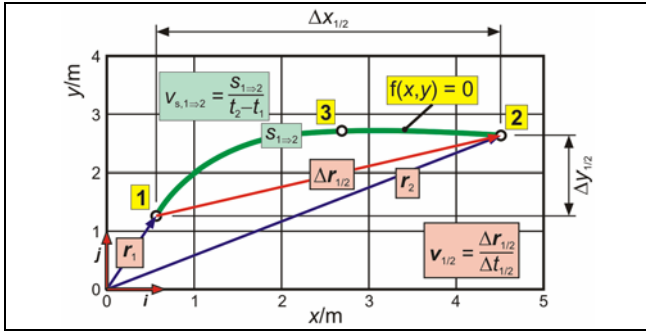
Kod pravocrtnog gibanja su za opis gibanja dovoljne komponente na pravcu gibanja – skalarni veličine (osi:  $x$  ili  $y$  ili  $z$ ).



Opis krivocrtnog gibanja u ravnini je bitno složeniji od opisa pravocrtnog zbog uključivanja drugoga stupnja slobode gibanja – prelazi se na opis s vektorskim veličinama (izračunavanja sa skalarnim veličinama – po dvije komponente). Opis krivocrtnog gibanja u prostoru nije bitno složeniji od opisa krivocrtnog gibanja u ravnini (problem je grafički prikaz putanje u tri dimenzije) – uključuje se treći stupanj slobode gibanja u opis s vektorskim veličinama (izračunavanja sa skalarnim veličinama – po tri komponente).

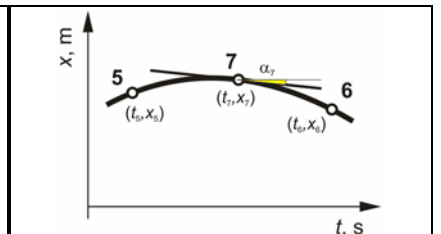
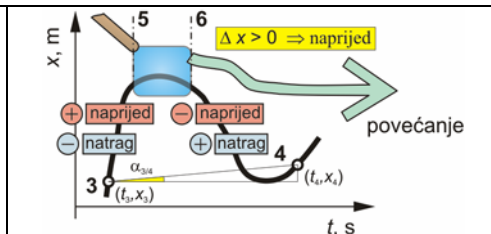
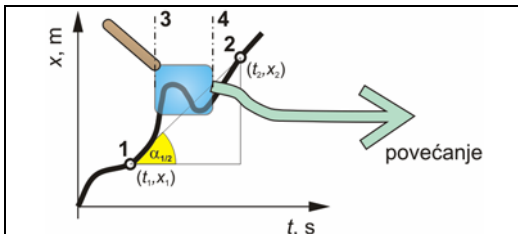
### 2.3 Brzina

Skalarna <b>putna brzina</b> , $v_s$ (speed) – put u jediničnome vremenu:	$v_s \equiv \frac{s}{t} \Rightarrow [v_s] = \frac{[s]}{[t]} = m \cdot s^{-1}$	Vektorska <b>brzina pomaka</b> , $\mathbf{v}$ (velocity) – pomak u jediničnome vremenu:	$\mathbf{v} \equiv \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$
--	---	--	--



<b>Putna brzina</b> $v_{s,1 \rightarrow 2} = \frac{s_{1 \rightarrow 2}}{t_2 - t_1}$	<b>Brzina pomaka</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>srednja</li> <li>trenutačna</li> </ul>	$v_{1/2} = \frac{\Delta r_{1/2}}{\Delta t_{1/2}}$	<table border="1"> <tr> <td><math>v_s</math></td> <td>m/s</td> <td>km/h</td> </tr> <tr> <td>pješak</td> <td>1,0</td> <td>3,6</td> </tr> <tr> <td>zvuk</td> <td>340</td> <td>1200</td> </tr> <tr> <td>svjetlost</td> <td>299792458 (točno)</td> <td><math>\approx 1 \cdot 10^9</math></td> </tr> </table>	$v_s$	m/s	km/h	pješak	1,0	3,6	zvuk	340	1200	svjetlost	299792458 (točno)	$\approx 1 \cdot 10^9$
		$v_s$	m/s	km/h											
pješak	1,0	3,6													
zvuk	340	1200													
svjetlost	299792458 (točno)	$\approx 1 \cdot 10^9$													
$v_3 = \frac{dr_3}{dt_3}$															

Samo je za pravocrtno gibanje:  $v_{s,1 \rightarrow 2} = |\mathbf{v}_{1/2}|$ .



$$v_{x,1/2} = \frac{\Delta x_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \tan \alpha_{1/2}$$

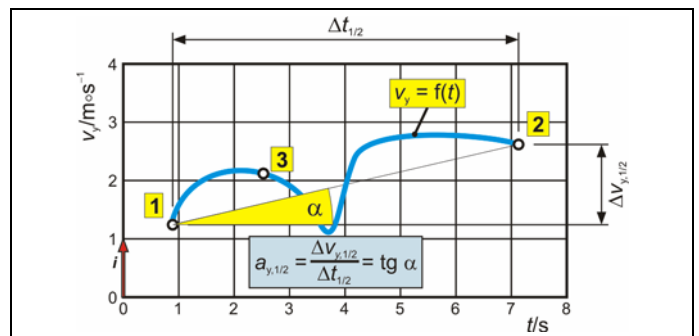
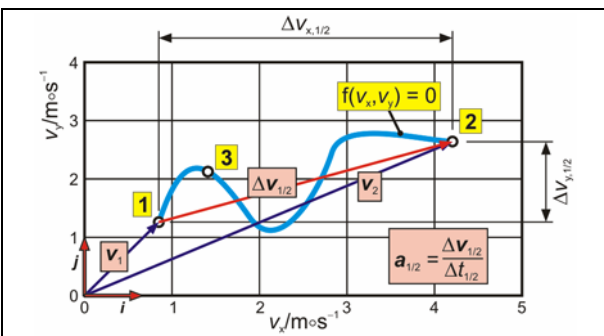
$$v_{x,3/4} = \frac{\Delta x_{3/4}}{\Delta t_{3/4}} = \frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} = \tan \alpha_{3/4}$$

$$v_{x,7} = \frac{dx_7}{dt_7} = \tan \alpha_7$$

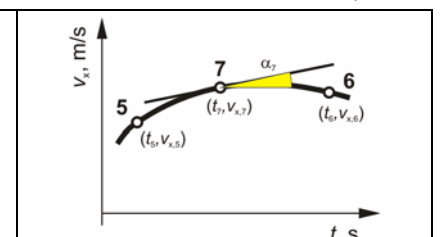
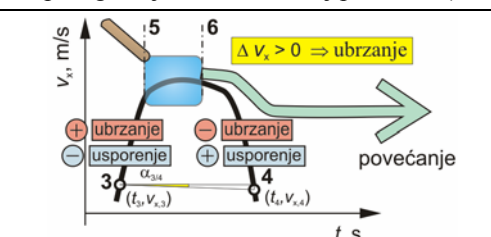
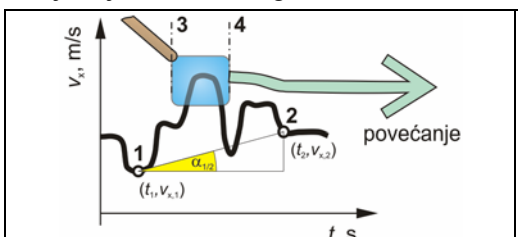
### 2.4 Ubrzanje (akceleracija)

**Ubrzanje** ( $\mathbf{a}$ ) – vektorska veličina kojom se opisuje promjena brzine u jediničnom vremenu (ubrzanje/usporenje – akceleracija/deceleracija).

<p style="text-align: center;"><b>UBRZANJE</b></p> <p style="text-align: center;">srednje      trenutačno</p>	Srednje ubrzanje: $\mathbf{a}_{1/2} \equiv \frac{\Delta \mathbf{v}_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$ (između točaka 1 i 2)
$[ \mathbf{a} ] = \frac{[ \mathbf{v} ]}{[t]} = \frac{m \cdot s^{-1}}{s} = m \cdot s^{-2}$	Trenutačno ubrzanje: $\mathbf{a}_3 \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ (u točki 3)



Sa smanjivanjem vremenskog intervala raste kvaliteta opisa gibanja, ali raste i broj podataka (beskonačno mali – beskonačno velik).



$$a_{x,1/2} = \frac{\Delta v_{x,1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \frac{v_{x,2} - v_{x,1}}{t_2 - t_1} = \tan \alpha_{1/2}$$

$$a_{x,3/4} = \frac{\Delta v_{x,3/4}}{\Delta t_{3/4}} = \frac{v_{x,4} - v_{x,3}}{t_4 - t_3} = \tan \alpha_{3/4}$$

$$a_{x,7} = \frac{dv_{x,7}}{dt_7} = \tan \alpha_7$$

## 2.5 Diferencijalni račun

**Diferencijalni račun** – dio infinitezimalnoga računa (s beskonačno malim vrijednostima veličina) koji se u fizici koristi za opisivanje stanja i promjena fizičkih veličina. (poznata ovisnost  $x = f_1(t)$  i  $y = f_2(t)$  + diferenciranje  $\Rightarrow v_x = f_3(t)$  i  $v_y = f_4(t)$ )

**Derivacija skalarne veličine** (npr. funkcija  $y = f(x)$ ):

Geometrija (derivacija po duljini)	Kinematika (derivacije po vremenu)	
$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$	$v_y = f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y}$	$a_y = f''(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = y''(t) = \ddot{y}$

Derivacije često sretanih elementarnih funkcija i osnovna pravila deriviranja:

$y =$	C (konstanta)	$x^n$	$\sin x$	$\cos x$	$a^x$	$e^x$	$\ln x$
$y' =$	0	$n \cdot x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$a^x \cdot \ln a$	$e^x$	$1/x$

1.	$y = u \pm v$	$\Rightarrow$	$y' = u' \pm v'$	2.	$y = u \cdot v$	$\Rightarrow$	$y' = u' \cdot v + v \cdot u'$
3.	$y = \frac{u}{v}$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$	4.	$y = f[v(x)]$	$\Rightarrow$	$y' = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

**Primjer P-2.1:**  $y = \tan x$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

**Derivacija vektorske veličine:** (npr. funkcija  $\mathbf{a} = f(\mathbf{v}, t)$ )

$$\mathbf{v} = v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k} \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0 \quad (\text{derivacija konstanti})$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \cdot \mathbf{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \mathbf{k} = \ddot{x} \cdot \mathbf{i} + \ddot{y} \cdot \mathbf{j} + \ddot{z} \cdot \mathbf{k}$$

## 2.6 Integralni račun

**Integralni račun** – dio infinitezimalnog računa koji se u fizici često koristi za opisivanje stanja i promjena fizičkih veličina. (poznata ovisnost  $v_x = f_1(t)$  i  $v_y = f_2(t)$  + integraljenje  $\Rightarrow x = f_3(t)$  i  $y = f_4(t)$ ). **Integriranje** – matematička operacija suprotna deriviranju.

$f(x) = \int f'(x) \cdot dx$	<b>INTEGRALI</b>	$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b [f(x_i) \cdot \Delta x]$
	neodređeni	određeni
Geometrija (integriranje po duljini)	Kinematika (integriranje po vremenu)	
$\int_1^2 y \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \sum_1^2 (y_i \cdot \Delta x_i) \right] = A_{1/2}$	$\int_1^2 v \cdot dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \sum_1^2 (v_i \cdot \Delta t_i) \right] = y_{1/2}$	$\int_1^2 a \cdot dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \sum_1^2 (a_i \cdot \Delta t_i) \right] = v_{1/2}$

**Neodređeni integrali:**  $f_1(x) = \frac{dy}{dx} \quad dy = f_1(x) \cdot dx \quad \int dy = y = \int f_1(x) \cdot dx = f_2(x) + C \quad y = f_2(x) + C$

$$f_1(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d[f_2(x) + C]}{dx} = \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{df_2(x)}{dx} \quad \frac{dC}{dx} = 0$$

**Određeni integrali:**  $\int_a^b f_1(x) \cdot dx = [f_2(x)]_a^b = f_2(b) + C - (f_2(a) + C) = f_2(b) - f_2(a)$  (ne sadrži konstantu C)

Integrali često korištenih elementarnih funkcija:

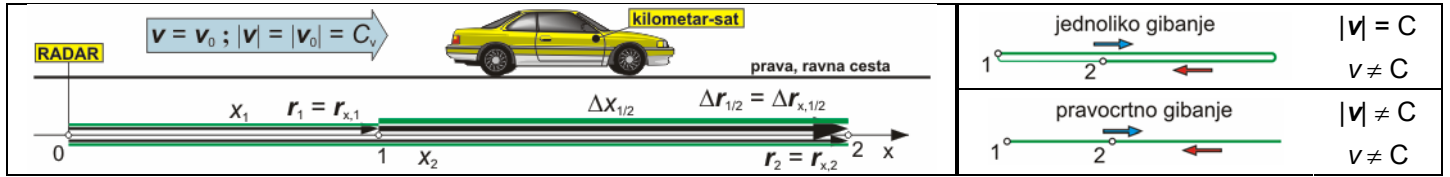
$f_1(x) =$	1	$x^n$	$\sin x$	$\cos x$	$a^x$ , za $0 < a \neq 1$	$1/x$	$e^x$
$\int f_1(x) =$	$x$	$x^{n+1}/(n+1)$	$-\cos x$	$\sin x$	$a^x/\ln a$	$\ln x$	$e^x$

**Primjer P-2.2:**  $y' = 12 \cdot x^2$   $y = 4 \cdot x^3 + C$  (C se određuju iz uvjeta definiranih u konkretnim problemima)

Osnovna pravila integriranja:  $\int k \cdot f_1(x) \cdot dx = k \cdot \int f_1(x) \cdot dx \quad \int [u(x) + v(x)] \cdot dx = \int u(x) \cdot dx + \int v(x) \cdot dx$

## 2.7 Jednoliko pravocrtno gibanje

**Jednoliko pravocrtno gibanje** – putanja je pravocrtna (pravocrtno gibanje), a brzina gibanja konstantna (jednoliko gibanje), pa se u jednakim vremenskim intervalima duž pravca prelaze jednaki putovi.



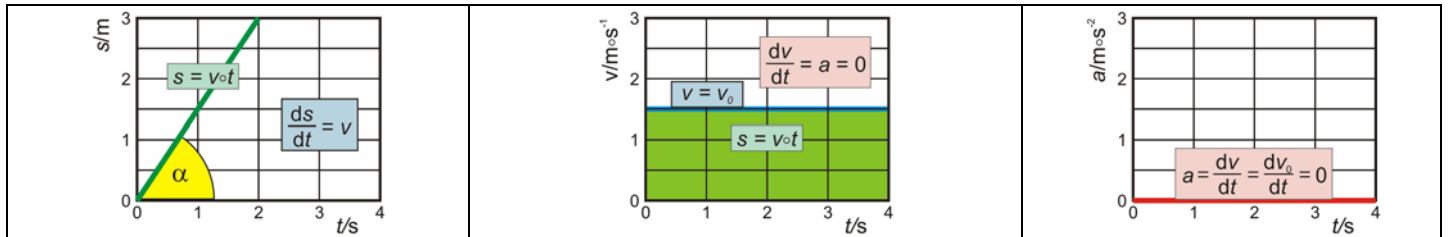
Jednoliko pravocrtno gibanje rijetko se susreće u prirodi i tehnici. Gibanje se opisuje skalarnim veličinama (komponente) – pravci svih relevantnih vektora (položaji, razmaci, brzine, ubrzanja) se poklapaju s pravcem putanje:  $x_1 = r_{x,1} = |\Delta r_{x,1}| \cdot \cos \alpha$ ;  $\Delta x_{1/2} = r_{x,1/2} = |\Delta r_{x,1/2}| \cdot \cos \alpha$ ;  $v_1 = v_{x,1} = |v_{x,1}| \cdot \cos \alpha$ ;  $\Delta v_{1/2} = \Delta v_{x,1/2} = |\Delta v_{x,1/2}| \cdot \cos \alpha = 0$ ;  $a_1 = a_{x,1} = |a_{x,1}| \cdot \cos \alpha = 0$ .

**Svojstva** su jednolikoga pravocrtnog gibanja: (kada nisu moguće zabune koriste se jednostavne oznake.  $s, v, a$ )

(a) prijedeni put jednak je intenzitetu pomaka:  $s = s_{1 \rightarrow 2} = |\Delta x_{1/2}| \neq C_s$  (mijenja se tijekom vremena),  $s > 0$  (uvijek),

(b) putna brzina je jednaka intenzitetu brzine pomaka (trenutne/srednje):  $v = v_{s,1} = v_{s,1 \rightarrow 2} = |v_1| = |v_{1/2}| = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = C_v$ ,

(c) trenutačno i srednje ubrzanje su jednaki nuli:  $a = a_1 = a_{1/2} = |a_1| = |a_{1/2}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = C_a = 0$ .



$$s = \int ds = \int v_0 dt = v_0 \int dt = v_0 t + C_s = v_0 t + s_0 \quad (\text{pri } t = 0: v_0 t = 0 \Rightarrow C_s = s_{t=0} = s_0) \quad (\text{ploština na dijagramu } v = f(t))$$

$$v = \int dv = \int a_0 dt = a_0 \int dt = a_0 t + C_v = v_0 \quad (\text{pri } t = 0: a_0 t = 0: C_v = v_{t=0} = v_0) \quad (\text{ploština na dijagramu } a = f(t) \ a = 0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dC_v}{dt} = 0$$

## 2.8 Pravocrtno gibanje – primjeri

**Primjer P-2.3:** Za koje bi vrijeme tane brzine 800 m/s prešlo put od Zemlje do Mjeseca?

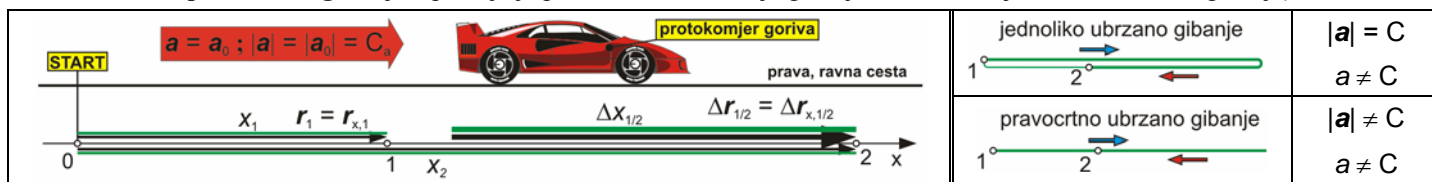
$v = 800 \text{ m/s}$ $s = 3,824 \cdot 10^5 \text{ km}$ $t = ?$	put = razmak, $v = C_v \Rightarrow$ jednoliko pravocrtno gibanje $s = v_0 t + s_0, s_0 = 0 \Rightarrow s = v_0 t$ Iz literature, razmak Zemlje i Mjeseca je $3,824 \cdot 10^5 \text{ km}$
$t = \frac{s}{v} = \frac{3,824 \cdot 10^5 \cdot \text{km}}{800 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{3,824 \cdot 10^5 \cdot 1000 \cdot \text{m}}{800 \cdot \text{m}} \cdot \text{s} = \frac{3,824 \cdot 10^6}{8} \cdot \text{s} = 0,478 \cdot 10^6 \cdot \text{s} = 0,478 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{h}}{3600}$	
$t = \frac{0,478}{3,6} \cdot 10^3 \cdot \text{h} = 0,1328 \cdot 10^3 \cdot \text{h} = 0,1328 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{d}}{24} = \frac{132,8}{24} \cdot \text{d} = 5,53 \cdot \text{d} = 5 \cdot \text{d} + 0,53 \cdot 24 \cdot \text{h} = 5 \text{ d} + 12,7 \cdot \text{h}$	
$t = 5 \text{ d } 12 \text{ h } + 0,7 \cdot 60 \cdot \text{min} = 5 \text{ d } 12 \text{ h } 42 \cdot \text{min} = \underline{5 \text{ dana } 12 \text{ sati } 40 \text{ minuta}}$ (diskusija rezultata – konstantna brzina)	

**Primjer P-2.4:** Ekspresni vlak ( $v = 120 \text{ km/h}$ ) Zagreb – Slavonski Brod (Zg ÷ SB = 190 km) polazi iz Zagreba u 11 h i 30 min. Brzi vlak ( $v = 100 \text{ km/h}$ ) iz SB-a za Zg polazi u 12 h i 30 min. Odrediti mjesto susreta vlakova grafički i računski.

$v_{s,e} = 120 \text{ km/h}$ $v_{s,b} = 100 \text{ km/h}$ $S_{Zg/SB} = 190 \text{ km}$ $t_{Zg} = 11.30 \text{ h.m}$ $t_{SB} = 12.30 \text{ h.m}$ $S_{Zg/M} = ? \text{ km}$ grafički, računski	put = razmak, $v = C_v \Rightarrow$ jednoliko pravocrtno gibanje; $v_{s,1 \rightarrow 2} = s_{1 \rightarrow 2} / (t_2 - t_1)$ $S_{Zg/SB} = S_{Zg/M} + S_{SB/M}$ $t_{Zg/M} = t_M - t_{Zg}$ $t_{SB/M} = t_M - t_{SB}$ $t_M = t_{Zg/M} + t_{Zg} = t_{SB/M} + t_{SB}$ $t_{Zg/M} = t_{SB/M} + t_{SB} - t_{Zg}$ $t_{SB} - t_{Zg} = 12.30 - 11.30 = 1 \text{ h}$ $v_{s,e} / v_{s,b} = 120 / 100 = 1,2$
<p style="font-size: small;">Opaz, preklapljeni su dva dijagrama: Zg i SB</p>	$\frac{S_{Zg/M}}{v_{s,e}} = \frac{S_{SB/M}}{v_{s,b}} + t_{SB} - t_{Zg} \Rightarrow S_{Zg/M} = \frac{v_{s,e}}{v_{s,b}} \cdot S_{SB/M} + v_{s,e} \cdot (t_{SB} - t_{Zg})$ $S_{Zg/M} = 1,2 \cdot S_{SB/M} + 120 \cdot 1 = 1,2 \cdot (S_{Zg/SB} - S_{Zg/M}) + 120$ $S_{Zg/M} = 1,2 \cdot S_{Zg/SB} - 1,2 \cdot S_{Zg/M} + 120$ $S_{Zg/M} + 1,2 \cdot S_{Zg/M} = 1,2 \cdot 190 + 120 = 348 \Rightarrow 2,2 \cdot S_{Zg/M} = 348$ $S_{Zg/M} = \frac{348}{2,2} = 158,18 \text{ km} = \underline{158 \text{ km}}$ (diskusija – korištenje oznaka)

## 2.9 Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje

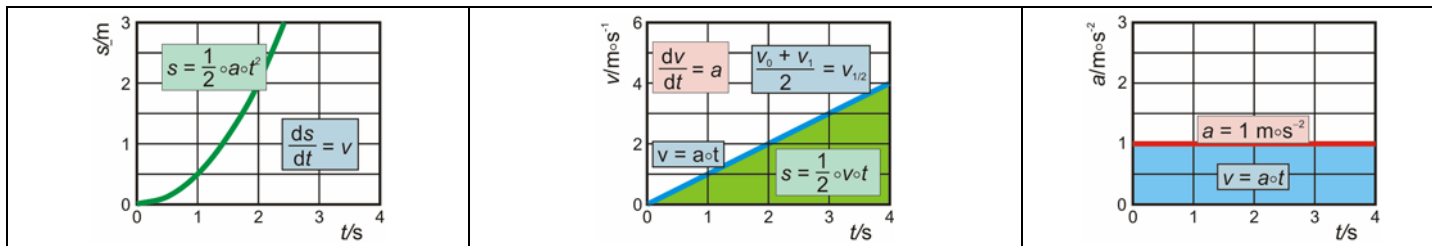
Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje – putanja je pravocrtna, a ubrzanje gibanja konstantno (jednoliko ubrzano gibanje).



Gibanje je pravocrtno i opisuje se skalarnim komponentama (oprezno s predznacima!). Često se sreće u prirodi i tehnici.

Svojstva su jednolikog ubrzanog pravocrtnog gibanja:

- (a) prijeđeni put jednak je intenzitetu pomaka:  $s = s_{1 \rightarrow 2} = |\Delta r_{1/2}| \neq C_s$  (mijenja se tijekom vremena),  $s > 0$  (uvijek),
- (b) putna brzina je jednaka intenzitetu brzine pomaka (trenutne/srednje):  $v = v_{s,1} = v_{s,1 \rightarrow 2} = |v_1| = |v_{1/2}| = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \neq C_v$ ,
- (c) trenutna i srednje ubrzanje:  $a = a_1 = a_{1/2} = |a_1| = |a_{1/2}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = C_a \neq 0$ .



$$v = \int dv = \int a dt = a \int dt = a \cdot t + C_v = a \cdot t + v_0 \quad (\text{pri } t = 0: a \cdot t = 0 \Rightarrow C_v = v_{t=0} = v_0) \quad (\text{ploština na dijagramu } a = f(t))$$

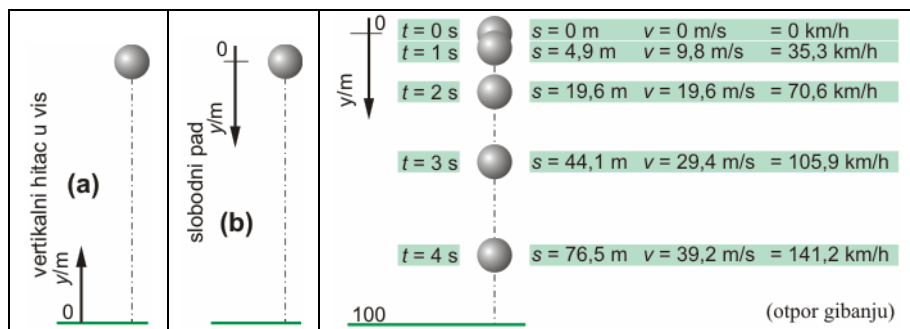
$$s = \int ds = \int v(t) dt = \int (a \cdot t + v_0) dt = \int a \cdot t dt + \int v_0 dt = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + C_s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

$$(\text{pri } t = 0: \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t = 0 \Rightarrow C_s = s_{t=0} = s_0) \quad (\text{ploština na dijagramu } v = f(t))$$

- 1. Ako je pri  $t = 0$ :  $v_0 = 0$  (neovisno je li pri  $t = 0$  i  $s_0 = 0$ ):  $v = a \cdot t$
- 2. Ako je pri  $t = 0$ :  $v_0 = 0$  i  $s_0 = 0$ :  $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$        $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$

## 2.10 Vertikalni hitac i slobodni pad

Tijelo se pri slobodnom padu giba pravocrtno jednoliko ubrzano. Ubrzanje zemljine teže ( $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2 \sim 10 \text{ m/s}^2$ ) ovisi o aktualnom položaju (za  $[g] = \text{m/s}^2$ ,  $\{g\} = \text{Zagreb: } 9,807, \text{ Reykjavik: } 9,823, \text{ Kinshasa: } 9,779, \text{ polovi: } 9,83, \text{ ekvator: } 9,78 \text{ m}$ ).



- brzina tijela neovisna o njegovoj masi ?
- prvi Newtonov zakon:  $a = F/m$
- za procjene:  $10 \text{ m/s}^2$
- otpor zraka raste s porastom brzine gibanja
- padobranac, s velike visine (iz literature):
- (I) zatvoren padobran:  $v \sim 54 \text{ m/s} (\sim 194 \text{ km/h})$
- (II) otvoren padobran:  $v \sim 6,3 \text{ m/s} (\sim 23 \text{ km/h})$ .

- (a)  $a = -g \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$      $t_0 = 0$  (start)     $v_0 = 0$  (start iz mirovanja)     $s_0 = H$  (start s visine H)
- $a = dv/dt$      $v = ds/dt$      $dv = a \cdot dt$      $ds = v \cdot dt$      $\int dv = \int a \cdot dt$      $\int ds = \int v \cdot dt$      $v = \int a \cdot dt$      $s = \int v \cdot dt$
- $v = \int -g \cdot dt = -g \cdot \int dt = -g \cdot t + C_v$      $t_0 = 0: v_0 = 0$      $-g \cdot t = 0$      $C_v = 0$      $v = -g \cdot t$
- $s = \int v \cdot dt = \int -g \cdot t \cdot dt = -g \cdot \int t \cdot dt = -g \cdot (\frac{1}{2} \cdot t^2 + C_s) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot C_s$      $t_0 = 0: s_0 = H$      $H = 0 - g \cdot C_s$      $C_s = H/-g$
- $s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot C_s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - g \cdot (H/-g) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + H = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
- (b)  $a = g \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$      $t_0 = 0$  (start)     $v_0 = 0$  (start iz mirovanja)     $s_0 = 0$  (start s kote 0)
- $v = g \cdot t + C_v$      $t_0 = 0: v_0 = 0$      $g \cdot t = 0$      $C_v = 0$      $v = g \cdot t$
- $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + g \cdot C_s$      $t_0 = 0: s_0 = 0$      $0 = 0 - g \cdot C_s$      $C_s = 0$      $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

**Primjer P-2.5:** Kojom će brzinom udariti o tlo kugla nakon slobodnog pada s visine od 100 m?

$h = 100 \text{ m}$ $n = ? \text{ m/s, km/h}$	$g = 9,8 \text{ m/s}^2$ $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ $v = g \cdot t$ $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (v^2/g^2) = \frac{1}{2} \cdot v^2/g$
$v = \sqrt{2 \cdot s \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot \text{m} \cdot 9,8 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \sqrt{1960 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = 44,27 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 45 \text{ m/s} = 45 \cdot 1000^{-3} \cdot \text{km} \cdot 3600 \cdot \text{s}^{-1}$ $v = 45 \cdot 3,6 = 162 = 160 \text{ km/h}$ (pomoć pri pamćenju: „veća je jedinica veća od manje“ – množenje manje s 3,6)	

### 2.11 Gibanje u ravnini

	$s = ?$ $v = ?$ $a = ?$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px; display: inline-block;">OPIS GIBANJA U RAVNINI</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">s vektorskim veličinama</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">s komponentama</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">s jediničnim vektorima</div> </div>
--	-------------------------------	--

Opis s vektorskim veličinama: (kratki teorijski opis – matematika)

$\Delta r_{1/2} = r_2 - r_1 \neq  r_2  -  r_1 $ $v_{1/2} = \frac{\Delta r_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = v_2 - v_1 \neq  v_2  -  v_1  \quad v_3 = \frac{dr_3}{dt_3}$ $a_{1/2} = \frac{\Delta v_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = a_2 - a_1 \neq  a_2  -  a_1  \quad a_3 = \frac{dv_3}{dt_3}$	<p style="text-align: center;">PANTOGRAF</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 20px;">nepomična točka</div> <div style="margin-left: 20px;"> <p>olovka po kopiji</p> <p>olovka po originalu</p> </div> </div>
---	--

Opis s jediničnim vektorima: (detaljniji teorijski opis – fizika)

$$r_1 = r_{1,x} \cdot i + r_{1,y} \cdot j \quad r_2 = r_{2,x} \cdot i + r_{2,y} \cdot j \quad \Delta r_{1/2} = r_2 - r_1 = (r_{2,x} \cdot i + r_{2,y} \cdot j) - (r_{1,x} \cdot i + r_{1,y} \cdot j) = (r_{2,x} - r_{1,x}) \cdot i + (r_{2,y} - r_{1,y}) \cdot j$$

$$\Delta v_{1/2} = v_2 - v_1 = (v_{x,2} \cdot i + v_{y,2} \cdot j) - (v_{x,1} \cdot i + v_{y,1} \cdot j) = (v_{x,2} - v_{x,1}) \cdot i + (v_{y,2} - v_{y,1}) \cdot j \quad v = v_x \cdot i + v_y \cdot j = \frac{dx}{dt} \cdot i + \frac{dy}{dt} \cdot j$$

$$\Delta a_{1/2} = a_2 - a_1 = (a_{x,2} - a_{x,1}) \cdot i + (a_{y,2} - a_{y,1}) \cdot j \quad a = a_x \cdot i + a_y \cdot j = \frac{dv_x}{dt} \cdot i + \frac{dv_y}{dt} \cdot j = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot i + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot j$$

Opis s komponentama: (izračunavanja u strojarstvu – predznak je „uključen“ u vrijednosti sin α, cos α)

$$x_1 = r_{1,x} = |r_1| \cdot \cos \alpha_1 \quad y_1 = r_{1,y} = |r_1| \cdot \sin \alpha_1 \quad x_2 = r_{2,x} = |r_2| \cdot \cos \alpha_2 \quad y_2 = r_{2,y} = |r_2| \cdot \sin \alpha_2$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{dr_x}{dt} = -|r| \cdot \sin \alpha \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{dr_y}{dt} = |r| \cdot \cos \alpha \quad |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \cos \beta = \frac{v_x}{v}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = \frac{dv_x}{dt} = -|r| \cdot \cos \alpha \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a_y = \frac{dv_y}{dt} = -|r| \cdot \sin \alpha \quad |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \cos \gamma = \frac{a_x}{a}$$

Opisivanje gibanja u prostoru je načelno isto kao i opisivanje gibanja u ravnini, s tim što se uvodi treća koordinata, z.

### 2.12 Horizontalni i kosi hitac

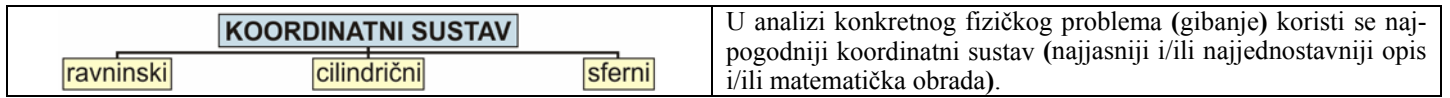
**Horizontalni hitac** – primjer složenog gibanja, koje slijedi iz kombinacije jednolikog pravocrtnog gibanja i slobodnog pada.

	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>t = 0: x = x_0 = 0, y = y_0 = H, v_x = v_{x,0} = 30 \text{ m/s}, v_y = v_{y,0} = 0, a_x = a_{x,0} = 0, a_y = a_{y,0} = -g,</math></li> <li><math>y = 0: x = x_{\text{Max}} = D \text{ (doseg)}</math>  <math>a_x = 0 \quad v_x = v_{x,0} \quad x = v_{x,0} \cdot t + x_0 = v_{x,0} \cdot t \text{ (tema 2.7)}</math>  <math>a_y = -g \quad v_y = -a_y \cdot t + v_{y,0} = -g \cdot t \quad y = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \text{ (tema 2.10)}</math>  <math>v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{x,0}^2 + g^2 \cdot t^2}</math>  <math>t = \sqrt{\frac{2 \cdot (H - y)}{g}} \quad x_{\text{Max}} = v_{x,0} \cdot t = D = v_{x,0} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}</math>  <math>v_x = 30 \text{ m/s}, H = 100 \text{ m}, g = 10 \text{ m/s}^2 \Rightarrow D = 130 \text{ m}, t_D = 4,5 \text{ s}, v_D = 54 \text{ m/s}</math> </li> </ul>
--	--

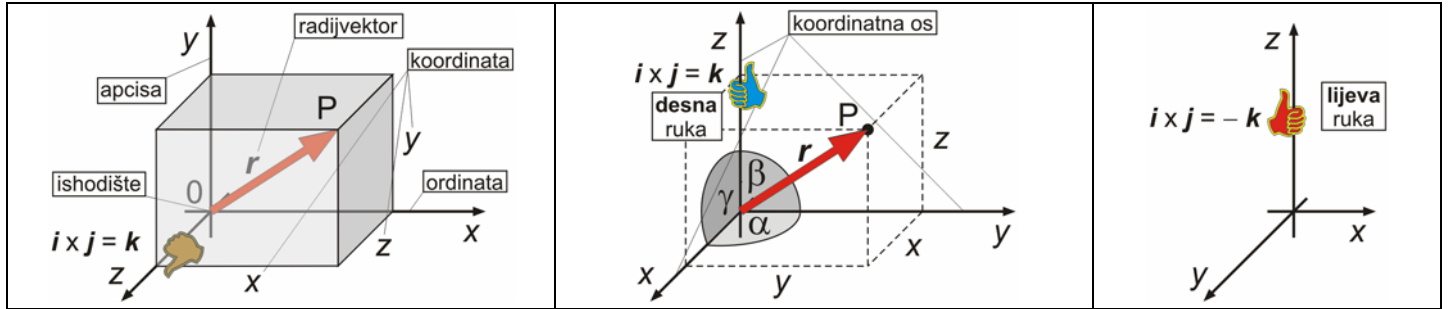
**Kosi hitac** je drugi primjer složenog gibanja – koji slijedi iz kombinacije jednolikog pravocrtnog gibanja i slobodnog pada.

	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>t = 0: x = x_0 = 0, y = y_0 = 0, v = v_0, \alpha = \alpha_0,</math>  <math>v_{x,0} = v_0 \cdot \cos \alpha_0 \quad v_{y,0} = v_0 \cdot \sin \alpha_0 \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}</math>  <math>x = v_{x,0} \cdot t \quad y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{y,0} \cdot t + y_0 = v_{y,0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2</math>  <math>v_x = v_{x,0} \quad v_y = v_{y,0} - g \cdot t \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}</math> </li> <li><math>y = 0: x = x_{\text{Max}} = D = v_{x,0} \cdot t</math>  <math>\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_{y,0} \cdot t \quad t = \frac{2 \cdot v_{y,0}}{g} \quad D = v_{x,0} \cdot t = \frac{2 \cdot v_{x,0} \cdot v_{y,0}}{g}</math> </li> <li><math>dy/dx = y' = 0: x = H</math>  <math>y = v_{y,0} \cdot \frac{x}{v_{x,0}} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_{x,0}^2} = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}} \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_{x,0}^2} \cdot x^2</math>  <math>y' = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}} - \frac{g}{v_{x,0}^2} \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{v_{y,0} \cdot v_{x,0}}{g}</math> </li> </ul>
--	--

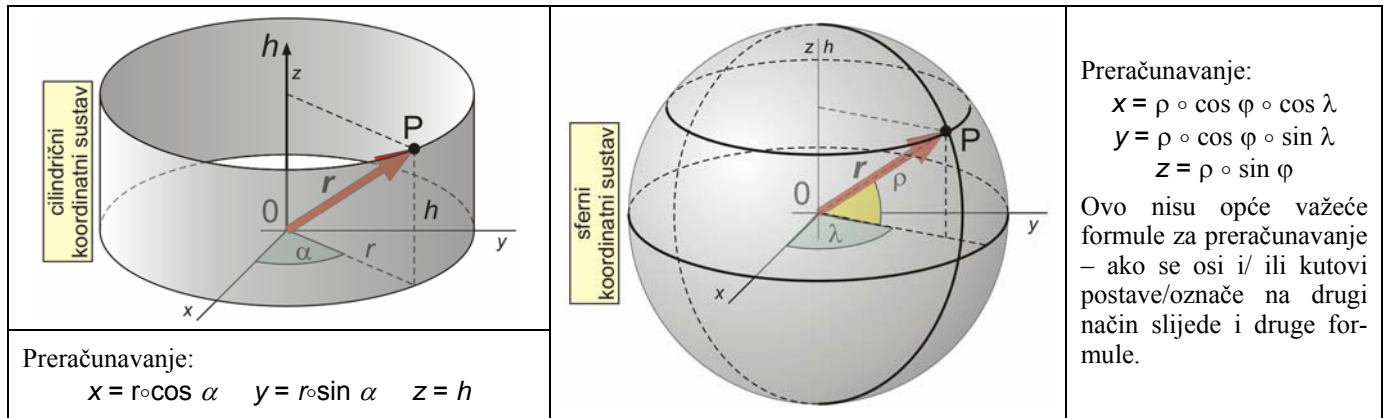
### 2.13 Koordinatni sustavi



Pravokutni (ravninski) koordinatni sustav:  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Raspored osi može biti po pravilu desne ruke i po pravilu lijeve ruke, koji se rijetko koristi.

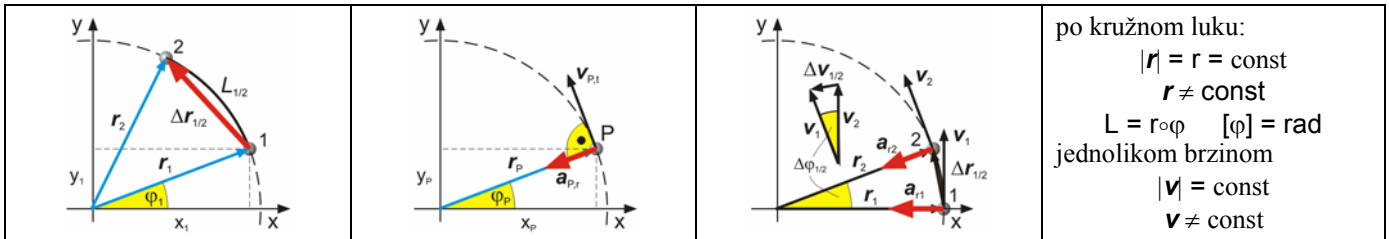


Kosokutni ravninski koordinatni sustav:  $\alpha$  i/ili  $\beta$  i/ili  $\gamma = 90^\circ$



### 2.14 Jednoliko kružno gibanje

**Jednoliko kružno gibanje** – točka se giba konstantnom brzinom, po kružnici (najjednostavnije krivocrtno gibanje). Pri opisivanju putanje se umjesto koordinati  $x, y$  mogu koristiti koordinate  $r, \varphi$  te jednoliko kružno gibanje postaje usporedivo s jednolikim pravocrtnim gibanjem.



**Period, T, s:** vrijeme potrebno za obilazak opsega kružnice ( $2\pi r$ ).

**Kutna brzina:**  $\omega_{1/2} = \frac{\Delta \varphi_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = \text{const} = \frac{2 \cdot \pi}{T}$     $\omega_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = C_\omega = \omega_{1/2}$     $\omega = \frac{\varphi}{t}$     $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Često se izostavlja i podrazumijeva oznaka jedinice za kut ( $[\omega] = 1/\text{s}$ ), što može dovesti do zabuna. (znači li to možda:  $[\omega] = \text{°/s}$ ?)

**Frekvencija** – broj događaja (obilazaka opsega kružnice:  $N = \varphi / 2\pi$ ) u jedinici vremena:

$$v = \frac{N}{t} = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{t} = \omega \cdot t_0 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{t} = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{T} \quad [v] = \frac{[N]}{[t]} = \frac{\text{dogadaja}}{\text{s}}$$

Često se izostavlja i podrazumijeva oznaka ponavljanog događaja  $\{[v] = \frac{\text{ObilazakaOpsegaKružnice}}{\text{s}}\}$ . ( $[\omega] = 1/\text{s} \neq [v]$ )

**Kutno ubrzanje:**  $\alpha_{1/2} = \frac{\Delta \omega_{1/2}}{\Delta t_{1/2}} = 0$     $\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = 0$     $\alpha = \frac{\omega}{t}$     $[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

Svojstva su jednolikog kružnog gibanja:

- (a) put (skalarni luk  $L$ )  $\neq$  intenzitetu pomaka (vektor,  $|\Delta r_{1/2}|$ ):  $L_{1/2} = |r| \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \neq |\Delta r_{1/2}|$
- (b) nepromjenjivi su intenziteti i promjenjivi pravci trenutnih vektorskih brzina pomaka:  $|v| = \left| \frac{dr}{dt} \right| = C_v$     $v \neq \text{const}$
- (c) nepromjenjivi su intenziteti i promjenjivi pravci trenutnih vektorskih ubrzanja pomaka:  $|a| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = C_a$     $a \neq \text{const}$

### 2.15 Kružno i harmonijsko gibanje

Kružno gibanje se odvija u ravnini (dva stupnja slobode), te za njegovo opisivanje treba koristiti vektore ili po dvije odgovarajuće komponente. U pravilu se nula koordinatnog sustava  $0, x, y$  postavlja u centar kružnice po kojoj se giba točka.

Kružno gibanje nije jednoliko ako je  $\beta \neq \pi/2$  – prisutna je tangencijalna komponenta ubrzanje.

$$r = |\mathbf{r}|$$

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$x = r \cdot \cos \varphi \qquad y = r \cdot \sin \varphi$$

$$x = r \cdot \cos \omega \cdot t \qquad y = r \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$v_x = -r \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t \qquad v_y = r \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$v = r \cdot \omega \text{ (izvesti izraz, znajući da je: } \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1)$$

$$a_x = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega \cdot t \qquad a_y = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega \cdot t$$

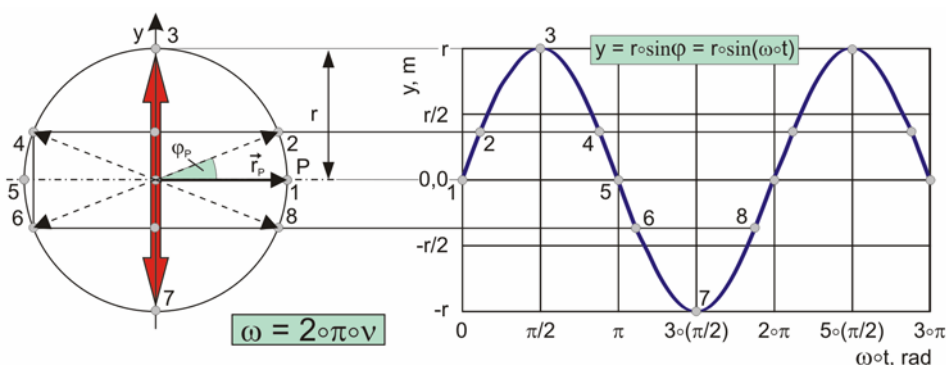
$$a_x = -x \cdot \omega^2 \qquad a_y = -y \cdot \omega^2$$

$$a = r \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{r} \text{ (izvesti izraz, koristeći Pitagorin poučak)}$$

Kod jednolikog kružnog gibanja:

- **radij vektor**, koji spaja centar kružnice i pokretnu točku, nepromjenjivog je intenziteta i promjenjivog pravca,
- trenutna brzina je okomita na radij vektor, nepromjenjivog je intenziteta i promjenjivog pravca,
- trenutna akceleracija, nepromjenjivog je intenziteta i promjenjivog pravca – istog kao i radij vektor, ali suprotnog smjera.

**Harmonijsko gibanje** – gibanje koje se može opisati sinusnom (kosinusnom) funkcijom:  $y = r \cdot \sin \omega \cdot t$



### 2.16 Relativno gibanje

Ako se dva promatrača uzajamno gibaju i analiziraju gibanje nekog objekta dobiti će različite rezultate (položaj, razmak/pomak, putanja/put, brzina pomaka / putna brzina, ubrzanje pomaka/ putno ubrzanje).

Svaki promatrač (opremljen sa: štopericom i mjernom trakom za duljinu) formira osobni **referentni sustav**, a dobivene veličine gibanja se nazivaju **relativnim veličinama**, na primjer :  $v_{P/A}$  – relativna brzina objekta P u odnosu na promatrača A.

$x_{P/A} = x_{B/A} + x_{P/B}$	$r_{P/A} = r_{B/A} + r_{P/B}$
$x_{P/A} = x_{B/A} + x_{P/B}$	$z_{P/A} = z_{B/A} + z_{P/B}$ $x_{P/A} = x_{B/A} + x_{P/B}$

	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. promatrač – <b>A</b>, objekt <b>B</b>:  <math>a_x = 0 \quad v_x = C_v \quad x = v \cdot t + C_s \quad a_y = -g \quad v_y = 0 \quad y = 0</math> </li> <li>2. promatrač – <b>B</b>, objekt <b>P</b>:  <math>a_x = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega \cdot t \quad v_x = -r \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t \quad x = r \cdot \cos \omega \cdot t</math>  <math>a_y = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega \cdot t \quad v_y = r \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t \quad y = r \cdot \sin \omega \cdot t</math> </li> <li>3. promatrač – <b>A</b>, objekt <b>P</b>:  <math>a_x = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega \cdot t \quad v_x = C_v - r \cdot \omega \cdot \sin \omega \cdot t \quad x = v \cdot t + C_s + r \cdot \cos \omega \cdot t</math>  <math>a_y = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega \cdot t - g \quad v_y = r \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t \quad y = r \cdot \sin \omega \cdot t</math> </li> </ol>
--	--